Se $\nabla f(a) = 0$, a é um ponto crítico logo é $\begin{cases} \text{extremo local} \\ \text{ou} \\ \text{ponto em sela} \end{cases}$

Ex) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

ponto crítico

$+ \quad -$

logo é ponto em sela

Teorema:

Em $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ em D, $a \in D$

A matriz $n \times n$ simétrica:

$$[Hf(a)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a)$$

Hessiana de f em a

$a \xrightarrow{h} x \qquad x = a + h$

Termo de 2º ordem da fórmula de Taylor:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(a)\, h_i h_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 \dots h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hf(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} h^T \cdot Hf(a) \cdot h$$

Def. Positiva	Semi Def. Positiva	Indef.	Semi Def. Negativa	Def. Negativa
$h^T \cdot Hf(a) \cdot h > 0$	$h^T \cdot Hf(a) \cdot h \geq 0$		$h^T \cdot Hf(a) \cdot h \leq 0$	$h^T \cdot Hf(a) \cdot h < 0$
Valores próprios > 0	Valores próprios ≥ 0		Valores próprios ≤ 0	Valores próprios < 0

Mínimos

Valores próprios ≤ 0 e ≥ 0

Ponto de Sela

Máximos