M.A matrizes simétricas $m \times m$

Para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno

M Def. Pos. $\Rightarrow M + \varepsilon A$ Def. Pos.

M Def. Neg. $\Rightarrow M + \varepsilon A$ Def. Neg.

M Indef $\Rightarrow M + \varepsilon A$ Indef

Logo para

$D \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(D)$, seja $a \in D$ um ponto crítico

a) Se $Hf(a)$ é def. Pos., a é um Min. local

b) Se $Hf(a)$ é def. Neg., a é um Max. local

c) Se $Hf(a)$ é Indef, a é um ponto de sela

d) Se a é Min. local então $Hf(a)$ é Semi Def. Pos.

e) Se a é Max. local então $Hf(a)$ é Semi Def. Neg.

Nos casos d) e e) para saber a natureza de a temos de olhar para termos de ordem > 2 de Taylor

ex) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 + y^2 + 10x,\ 2xy + 2y)$

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \vee x = -1 \end{cases}$$

Para $y = 0$

$x(6x + 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{3}$

Para $x = -1$

$6 - 10 = -y^2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = y \Leftrightarrow \pm 2 = y$

Pt críticos: $(0,0)$; $(-\frac{5}{3}, 0)$; $(-1,2)$; $(-1,-2)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{bmatrix}$$

Para $(0,0)$ $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$

É mínimo local

Para $(-\frac{5}{3}, 0)$ $\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$

É máximo local

Para $(-1,2)$

$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(Hf(-1,2)) = -16$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -16$ logo sinais diferentes

Ponto em sela

Para $(-1,-2)$

$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(Hf(-1,-2)) = -16$

Ponto em sela