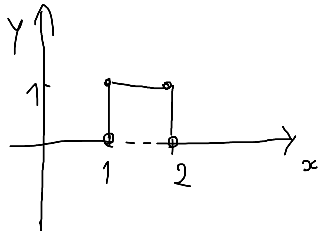
Cálculo integral em $\mathbb{R}^m$

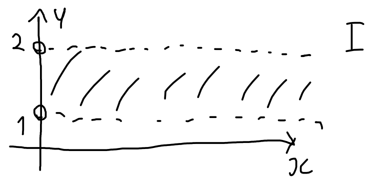
Def. Um conjunto $I \subset \mathbb{R}^m$ diz-se um intervalo se $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_m$ onde $I_j \subset \mathbb{R}$ é um intervalo

(I é um paralelepípedo-m)

I será aberto, fechado ou compacto se todos os I_j o forem

ex) $I = [1,2] \times]0,1] \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $I = [0,+\infty[\times]1,2[$

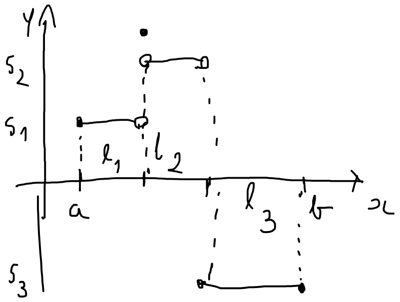




Se I é limitado, o volume-m é $V(I) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)\cdot\ldots\cdot(b_m - a_m)$

Def: $I \subset \mathbb{R}^m$ compacto

$s: I \to \mathbb{R}$ diz-se uma função em escada se $\exists$ partição finita de I tal que s é constante no interior de cada um dos sub-intervalos da partição.



$$\int_a^b s(x)\,dx = s_1 \cdot V(l_1) + s_2 \cdot V(l_2) + s_3 \cdot V(l_3)$$

- Se $s: I \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, I intervalo compacto, é uma função em escada tal que s toma os valores constantes s_i, $i = 1,2,\ldots m$ nos sub-intervalos $R_1, R_2, \ldots R_m$ de uma partição finita de I

então: $\displaystyle\int_I s = \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot V(R_i)$ Vol-m de R_i

Def:

$I \subset \mathbb{R}^m$ compacto

$f: I \to \mathbb{R}$ limitada

$$\underline{\int_I} f = \sup\left\{ \int_I s : s: I \to \mathbb{R} \text{ em escada } s \leq f \right\}$$

$$\overline{\int_I} f = \inf\left\{ \int_I s ; s: I \to \mathbb{R} \text{ em escada } s \geq f \right\}$$

Se $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$

f é integrável e

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$$

Notação: $\int_I f$, $\int_I f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots x_m$, $\underbrace{\int\cdots\int}_{m} f(x_1,\ldots x_m)\,dx_1\ldots x_m$