Teorema de Fubini

I compacto
$f: I \to \mathbb{R}$
$\int_I f$ existe

O teorema afirma que para calcular $\int_I f$ podemos escolher uma ordem de integração e integrar uma variavel de cada vez

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left[\cdots \int_{a_{x-1}}^{b_{x-1}} \left[\int_{a_x}^{b_x} f(x_1 \ldots x_{x-1}, x_x)\, dx_x \right] dx_{x-1} \right] dx_1$$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ compacto

$f: A \times B \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{A \times B} f$ existe

Com $x \in A$ e $y \in B$

$\to f_y: A \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y)$ y fixo

ou

$\to f_x: B \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x,y)$ x fixo

Leva a $\to$ $\int_{A\times B} f = \int_A \left[\underline{\int}_B f \right] = \int_A \left[\overline{\int}_B f \right] = \int_B \left[\underline{\int}_A f \right] = \int_B \left[\overline{\int}_A f \right]$

Se f contínua

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left[\int_B f \right] = \int_B \left[\int_A f \right]$$

Ex1: $I = [0,1] \times [0,2]$

$f(x,y) = x(x^2+y^2)$

$$\int_I f = \int_0^1 \int_0^2 x(x^2+y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{x y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 2x^3 + x\frac{8}{3}\, dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{8}{6} x^2 \right]_0^1 = \frac{11}{6}$$

$$\int_I f = \int_0^2 \int_0^1 x(x^2+y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{y^2}{2} \right] dy = \left[\frac{y}{4} + \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{11}{6}$$