Espaço Vectorial de dimensão n c/ base canónica

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$$

$\{e_j, j = 1, \dots, n\}$

$\hookrightarrow e_j = (\underbrace{0, \dots, 1}_{j}, \dots, 0)$

Produto interno euclidiano

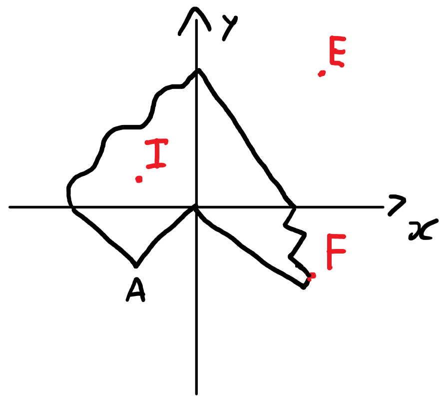
$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \|x\|^2 = x \cdot x = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$$x \cdot y = \|x\| \, \|y\| \cos(\theta)$$

! Definição de bola (Vizinhança em $\mathbb{R}^n$)

$\hookrightarrow$ Bola aberta de raio ε ($\varepsilon > 0$) de centro em a é:

$$B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \varepsilon\}$$



Pontos

- Exteriores a A (ie. E):

  $\exists_{\varepsilon > 0} \; B_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$

- Interiores a A (ie. I):

  $\exists_{\varepsilon > 0} \; B_\varepsilon(P) \subset A$

- Fronteiros a A (ie. F):

  $\forall_{\varepsilon > 0} \; B_\varepsilon(P)$ contém $\to A$, $\searrow \mathbb{R}^n \setminus A$

$A \subset \mathbb{R}^m$ (A é conjunto de $\mathbb{R}^m$)

$\bar{A} = A \cup$ fronteira de A
$\hookrightarrow$ fecho de A

A é $\begin{cases} \text{Aberto, se todos os pontos são interiores (não contem a fronteira)} \\ \text{Fechado, se } \mathbb{R}^m \setminus A \text{ é aberto} \\ \text{Nenhum dos dois ie.} \end{cases}$

$x, y, z \in \mathbb{R}^3$

$x, y, z \geq 0 \wedge x + y + z < 1 \hookrightarrow$ não é aberto nem fechado

Sucessões em $\mathbb{R}^m$

$x^1, x^2, x^3 \ldots \Rightarrow \{x^j\}\ j \in \mathbb{N}$

Com $x^j \in \mathbb{R}^m \Rightarrow x^j = (x_1^j, \ldots, x_m^j)$

ex) $x^j = \left(\frac{1}{j} - 1, j^3, 5j + 2, 2\right)$ $x^j \in \mathbb{R}^4$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1^j = \frac{1}{j} - 1 \\ x_2^j = j^3 \\ x_3^j = 5j + 2 \\ x_4^j = 2 \end{cases}$

$j = 3$

$x^3 = \left(-\frac{2}{3}, 27, 17, 2\right)$

Limites em $\mathbb{R}^m$

: A sucessão $\{x^j\}$ converge para o limite $a \in \mathbb{R}^m$ se:

$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\ \underset{P \in \mathbb{N}}{\exists}\ j > P \Rightarrow x^j \in B_\varepsilon(a)$

ex) $x^j = \left(\frac{1}{1 + j^2}, \frac{j}{3j + 1}, 4, \frac{1}{j} + 1\right)$ em $\mathbb{R}^4$ o limite é $\left(0, \frac{1}{3}, 4, 1\right)$

Nota!
Os pontos x^j aproximam-se de a se as coordenadas de x_j se estiverem a aproximar das coordenadas respectivas de a.