$\int_I f$ quando existe?

- Proposição: $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto $f: I \to \mathbb{R}$ limitada. $\int_I f$ existe sse $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0, \exists$ partição finita de I tal que se $R_1, \dots, R_N$ são os subintervalos em cuja interior $\sup f - \inf f > \varepsilon$ então $\sum_{j=1}^{n} vol(R_j) < \delta$

Df: $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo se $\forall \delta > 0, \exists$ coleção finita de intervalos $R_1, \dots R_n$ tais que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} R_j \quad e \quad \sum_{j=1}^{N} vol(R_j) < \delta$$

Teorema: $I \subset \mathbb{R}^n$ intervalo compacto $f: I \to \mathbb{R}$ limitada. Se o conjunto dos pontos onde f não é contínua tiver conteúdo nulo então $\int_I f$ existe

↳ Corolário: se f é contínua então é integrável em I

Seja $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um conjunto compacto e $h: A \to \mathbb{R}$ contínua

Seja $\Gamma_h \subset \mathbb{R}^n$ o gráfico de h então Γ_h tem conteúdo nulo

- Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $f: S \to \mathbb{R}$ limitada $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$

Seja I um intervalo compacto tal que $S \subset I$

Dizemos que f é integrável se $\tilde{f}$ é integrável em I e nesse caso temos

$$\int_S f = \int_I \tilde{f}$$

Teorema:

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado pela união de um número final de gráficos de funções contínuas definidas em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$

Seja $f: S \to \mathbb{R}$ contínua então $\int_S f$ existe

1) Volume de S é:

$$Vol(S) = \int_S 1$$

2) Carga / Massa de S é:

$$M(S) = \int_S \alpha$$

3) Centroide de S é:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{Vol(S)} \cdot \int_S x_j$$