Teorema da função inversa

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto

$f: D \to \mathbb{R}^n$, de classe C^k, $k \geq 1$

Seja $a \in D$ tal que $\det Df(a) \neq 0$ então, $\exists$ aberto $U \subset D$, $a \in U$, tal que:

1) A restrição de f a U é injetiva ($\exists$ inversa local)

2) A imagem de U por f, $V = f(U)$ é um conjunto aberto (Dado y suficientemente perto de $f(a)$ $\exists^1 x \in U$ tal que $y = f(x)$)

3) A inversa local $f^{-1}: V \to U$ é de classe C^N e $Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$

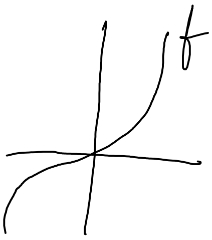
Nota: Sabendo que a inversa local $f^{-1}: V \to U$ é diferenciável e invertível que: $Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$

porque $f^{-1} \circ f: U \to U$; $f \circ f^{-1}: V \to V$

$$\begin{cases} Df^{-1}(f(a)) \cdot Df(a) = I \\ Df(a) \cdot Df^{-1}(f(a)) = I \end{cases} \Rightarrow Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$$

Nota: O teorema da função inversa nada diz sobre a injetividade de f (Global)

Nota: se $\det Df(a) = 0$ o TFInv nada afirma ex



$(0,0)$ $\det = 0$

mas f é inversa

No entanto se $\det Df(a) = 0$, caso exista inversa local ela não dif em $f(a)$ uma vez que $[Df(a)]^{-1}$ não existe

ex)

$$\begin{cases} 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2 \\ \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 1 \end{cases}$$

seja $f(x,y) = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \operatorname{sen}(x) + \cos(y)\right)$

$\hookrightarrow \det Df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow$ Proposição Verdadeira