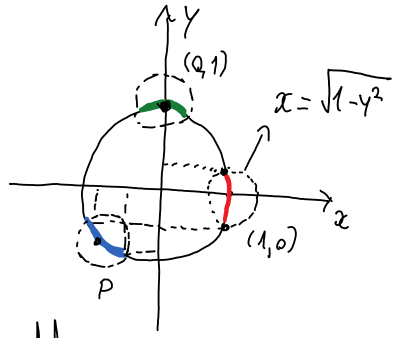
ex) $n=2$, $m=1$

$$F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$$

$$F(x,y)=0 \iff y = \pm\sqrt{1-x^2}, \; x \in [-1;1]$$



Não é possível escrever todas as soluções em simultâneo, na forma $y=f(x)$ ou $x=g(y)$

Na vizinhança de $(1,0)$ todas as soluções podem ser escritas na forma $x=g(y)=\sqrt{1-y^2}$ (mas não na forma $y=f(x)$)

Nota:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 2x\,|_{x=1} = 2 \neq 0 \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2y\,|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Na vizinhança de $(0,1)$ todas as soluções podem ser escritas na forma $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (mas não na forma $x=g(y)$)

Nota:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(0,1) = 2x\,|_{x=0} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2y\,|_{y=1} = 2 \neq 0 \end{cases}$$

Na vizinhança de P todas as soluções podem ser escritas como $y=f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ e $x = g(y) = -\sqrt{1-y^2}$

Nota
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0 \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0 \end{cases}$$

Teorema da função inversa

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto $\qquad n > m$

$F : D \to \mathbb{R}^m$

classe C^k, $k \geq 1$

Escrevam-se os pontos $x \in D$ na forma $x = (z, y)$ com $z \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$

seja $x_0 = (z_0, y_0) \in D$ tal que $F(x_0) = 0$ e

$$\det \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0) \right] \neq 0$$

Então, $\exists$ vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ e uma função $f : V \to \mathbb{R}^m$ (a função implícita) tal que:

$$F(x,y) = 0 \text{ e } (z,y) \in U \iff y = f(z)$$