Teorema da função inversa

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto

$F: D \to \mathbb{R}^m$, $n > m$

↳ classe C_1

Escrevemos $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ na forma

$x = (z, y)$, $z \in \mathbb{R}^{n-m}$

$y \in \mathbb{R}^m$

sistema de m equações c/ n incógnitas

$F(z, y) = 0$

Tendo uma solução $x_0 = (z_0, y_0) \in D$ tal que

$\det \left[\frac{\partial f}{\partial y} (x_0) \right] \neq 0$

Logo, $\exists$ Aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ tal que

$x = (z, y) \in U$
$F(z, y) = 0 \iff y = f(z)$ ← implícita

onde $f: V \subset \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e está def. numa vizinhança aberta de z_0

Nota: $F(z, \underbrace{f(z)}_{y}) = 0 \quad \forall z \in V$

ex) $\begin{cases} u = xy + \sin(x+y) \\ v = e^{-x+y+2} + \frac{x}{y} \end{cases}$ $n = 4$, $m = 2$

a) Mostre que na vizinhança de $(x, y, u, v) = (-1, 1, -1, 0)$ o sistema define (x, y) como função de (u, v).

b) Calcule $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(-1, 0)$

a)

$\begin{cases} F_1 = u - xy - \sin(x+y) = 0 \\ F_2 = v - e^{-x+y-2} - \frac{x}{y} = 0 \end{cases}$

$$Df(x, y, u, v) = \begin{bmatrix} -y - \cos(x+y) & -x - \cos(x+y) & 1 & 0 \\ e^{-x+y-2} - \frac{1}{y} & -e^{-x+y-2} + \frac{x}{y^2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(-1, 1, -1, 0)$

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ x \quad\; y \quad\; u \quad\; v \end{array}$$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

b)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(-1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(-1,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(-1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(-1,0) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \iff Df(-1,0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$