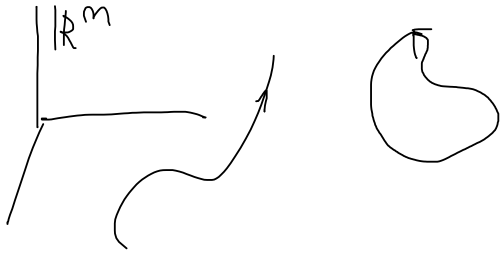
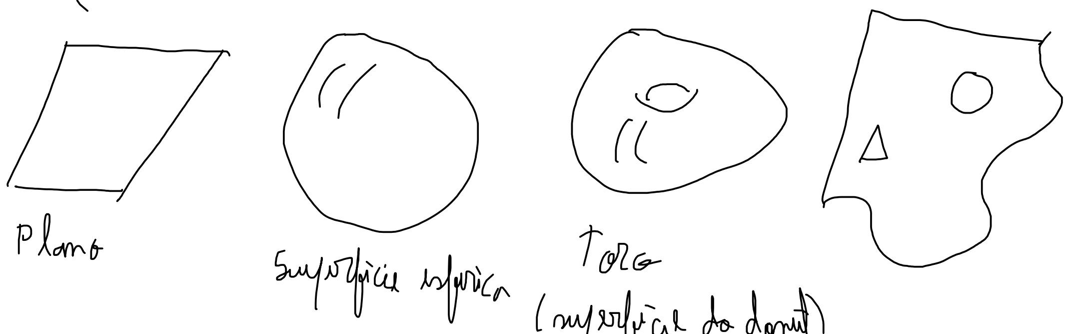
Variedades Diferenciáveis (curvas e superfícies)

Uma variedade diferencial de dimensão k é um objeto geométrico "regular" de dimensão k ou seja que possa ser descrito localmente por k parametros

$k=1$
curva



$k=2$
superfície



$k=3$
$\mathbb{R}^3$, toro-3

Definição: Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ diz-se uma variedade diferencial de dimensão k ou variedade-k com $1 \leq k \leq m$, se $\forall p \in M$, $\exists$ aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, $p \in U$ e uma função de classe C^1 $F: U \to \mathbb{R}^{m-k}$ tal que

$$x \in M \cap U \iff \begin{cases} F(x)=0 \\ DF(x) \text{ tem caracteristica (máxima) } m-k \end{cases}$$

Nota: A condição caracteristica $Df(x) = m-k$, garante, pelo TF Imp que M localmente é um gráfico de uma função de classe C^1, $f: V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-k}$ V aberto

$M \cap U$ é um conjunto de nível de $F_1, \dots, F_{m-k}$ logo $DF_j(p)$, $j=1,\dots,m-k$ serão normais a M em p_j por hipótese, estes vetores são linearmente independentes (porque car$(Df(p)) = m-k$)

espaço normal a M em p $= T_pM^\perp =$ Espaço vetorial de dimensão $(m-k)$ gerado pela base $\{\nabla F(p), \dots, \nabla F_{m-k}(p)\}$

espaço tangente a M em p $= T_pM = \{v \in \mathbb{R}^m : v \text{ é } \perp \text{ a todos os vetores de } T_pM^\perp\}$

$$\dim T_pM = k$$
$$\dim T_pM^\perp = m-k$$

ex) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$n = 3$

$n - k = 1$

$\rightarrow k = 2$

$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$

$p(p_1, p_2, p_3)$

$(T_p S^{2})^{\perp} = \{ \lambda \cdot \nabla F(p), \lambda \in \mathbb{R} \}$

$(T_p S^2) = \{ v \in \mathbb{R}^3 : v \cdot \nabla F(p) = 0 \}$