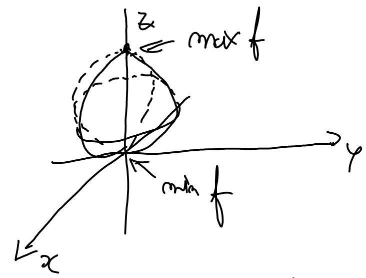
Como encontrar os extremos min e max dos valores que f toma sobre M

ou seja restrição de f a M $\qquad M$ var-K, $M \subset U$

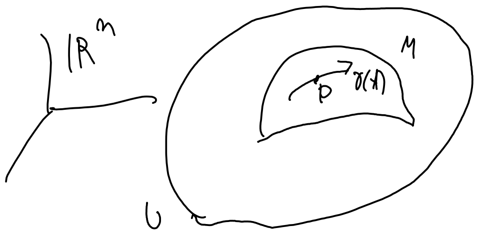
← Extremos condicionados

ex) Qual o máx e o min de $f(x,y,z)=z$ sobre a superfície de raio 1 e centro $(0,0,1)$

$$\nabla f(x,y,z)=(0,0,1)\neq 0$$



Seja então $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto $f: U \to \mathbb{R}$ classe C^1, $M \subset U$ var-K



f
$M \to \mathbb{R}$

Seja $\varepsilon > 0$, $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ uma curva com $\gamma(0)=P_0$

Se P é extremo local da restrição de f a M então a função $f\circ\gamma(t)$ terá um extremo local em $t=0$

$\Downarrow$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\circ\gamma(t) = \nabla f(P)\cdot\gamma'(0)=0$$

O vetor $\gamma'(0) \in T_pM$ e dado $v \in T_pM$, $\exists$ curva em M que passa em P c/velocidade v

ou seja é necessário que

$$\nabla f(P)\cdot v = 0,\ \forall v \in T_pM \iff \nabla f(P) \in T_pM^{\perp}$$

Teorema: $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: U \to \mathbb{R}$, classe C^1, $M \subset U$ var-K

Se a restrição de f a M tem um extremo local em $P \in M$ é necessário que

$$\nabla f(P) \in T_pM^{\perp}$$

Se, na vizinhança de P, M é descrita pelas equações: $\begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ F_{n-k}(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$

Com car $DF(x)=n-K$ então

$$\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla F_1(P) + \dots + \lambda_{n-k}\nabla F_{n-k}(P)$$

$$\begin{cases} F_1(x)=0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x)=0 \\ \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla F_1(x) + \dots + \lambda_{n-k}\nabla F_{n-k}(x) \end{cases}$$

ex)

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ (0,0,1)=\lambda(2x,2y,2(z-1)) \end{cases} \iff \begin{cases} (0,0,2) \\ (0,0,0) \end{cases}$$

$f(0,0,2)=2$

$f(0,0,0)=0$

4x) Max e min de $f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2$ na bola fechada $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

• interior

$\nabla f(x,y,z)=(2x,4y,8z)=(0,0,0)$

$\hookrightarrow$ $(0,0,0)$ é o único ponto crítico

$$Hf(x,y,z)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}=Hf(0,0,0)$$

$f:0$

$\hookrightarrow$ $(0,0,0)$ é mínimo local

• Fronteira da B

$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0 \\ (2x,4y,8z)=\lambda(2x,4y,8z) \end{cases} \iff \Big\{$$

$2x=2x\lambda$

- $\to x=0$
  - $\to \lambda=2 \to z=0$
    - $\to y=1$
    - $\to y=-1$
  - $\to y=0$
    - $\to z=1$
    - $\to z=-1$
- $\to x=1$
  - $\to y=z=0$
    - $\to x=1$
    - $\to x=-1$

6 soluções

$(1,0,0)$, $(-1,0,0)$ $\to f:1$

$(0,1,0)$, $(0,-1,0)$ $\to f:2$

$(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ $\}$ Max $f:4$