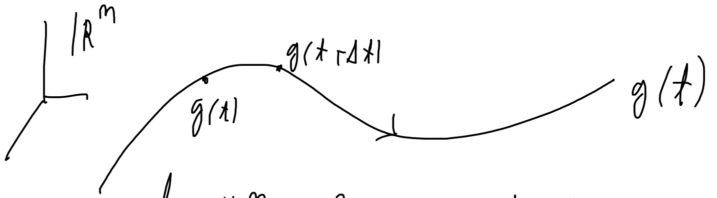
Aula 37

$\int$ de linha de campos vectoriais <=> trabalho de uma força ao longo de uma trajectória



$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vectorial $\quad W = f \cdot d = \|f\| \, \|d\| \cos(\theta)$

Como definir o trabalho de f?

o troço $g(t)$ e $g(t+\Delta t)$ é bem aproximado por $g'(t) \cdot \Delta t$

Logo o trabalho é aproximado por $f(g(t)) \cdot g'(t) \cdot \Delta t$

↳ Definição: $g: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização de uma curva (var-1) C em $\mathbb{R}^n$. Seja $f: C \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial contínuo

a integral de linha de f ao longo de g (ou trabalho de f ao longo de C no sentido de g)

$$\int f \, dg = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt$$

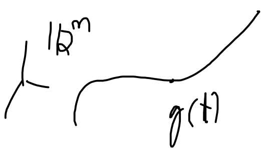
Teorema: Se $g_1: I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $g_2: I_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ são 2 parametrizações de C então:

$$\int f \, dg_1 = \pm \int f \, dg_2$$

+ se g_1 e g_2 percorrem C no mesmo sentido

− se g_1 e g_2 percorrem C em sentidos opostos

ex) W de f constante



$g: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$f = \alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\int f \, dg = \int_a^b \alpha \cdot g'(t) \, dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \frac{dg_j}{dt}(t) \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (g_j(b) - g_j(a)) = \alpha \, \Delta g$$

ex) $g(t)$ = posição

$g'(t)$ = velocidade

$g''(t)$ = aceleração

$F(g(t)) = m \times g''(t)$

$\frac{d}{dt} g'(t) \cdot g'(t) = 2\, g''(t) \cdot g'(t)$

$$\int f\, dg = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_a^b m\, g''(t) \cdot g'(t)\, dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \left(g'(t) \cdot g'(t)\right) dt =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\|g'(b)\|^2 - \|g'(a)\|^2\right) = \frac{1}{2} m \left(V_b - V_a\right) = T(b) - T(a)$$

$W = \Delta T$