· Limites

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua em $a \notin D$ e é fronteira de D

$$\forall_{\delta>0} \; \exists_{\varepsilon>0} : x \in B_\varepsilon(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in B_\delta(b)$$

$$\Leftrightarrow$$

$\forall$ sucessão $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ contida em D com $x^j \to a$ tem-se que $\lim_{j \to \infty} f(x^j) = b$

↳ Logo prolonga-se, por continuidade, f a $D \cup \{a\}$ tal que:

$$\tilde{f} = \begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & , x \in D \\ \tilde{f}(x) = b & , x = a \end{cases}$$

Ex:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$D \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

f contínua em D

Imp!

$$|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$
$$|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$
$$|x^2-y^2| \leqslant x^2+y^2$$

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \left| \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f(0,y) = -1$

$f(x,0) = 1$

Não há limite

- Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e se $\lim_{y \to b} g(y) = c$ então $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c$

- Se $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ então todos os limites direccionais de f em a são iguais

Ex: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$y = mx$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{x^2 + mx^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Não existe $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ pois os limites direccionais são diferentes

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ $\quad \exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = ?$

$y = mx$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^3}{x^2(m^2+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{mx}{m^2+x^2}$$

Logo limites direccionais $\begin{cases} m \neq 0 \quad \lim = 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x,0) = 0 \\ \lim_{y \to 0} f(0,y) = 0 \end{cases}$

Mas $y = x^2$

$f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$

↳ Logo não há limite