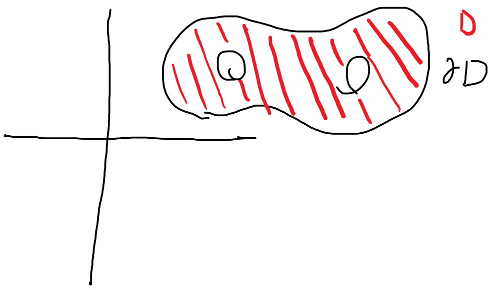
Teorema da Divergência

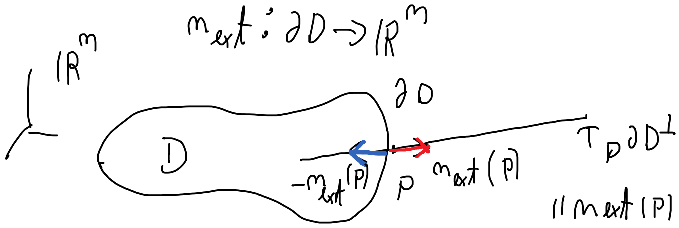
Def: $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio regular se é um aberto, limitado para uma variedade $(n-1)$ compacta e se é também a união finita de regiões simples

ex) $n=2$



$n = m$

$n_{ext}: \partial D \to \mathbb{R}^n$



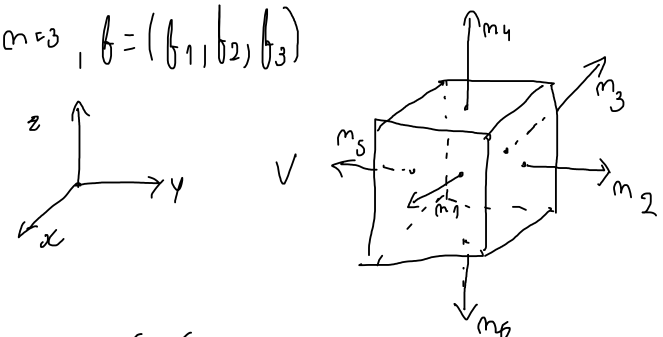
$\|n_{ext}(P)\| = 1$

$P \in \partial D$, ∂D var-$(n-1)$; $\dim T_P \partial D^{\perp} = 1$

Def: $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: U \to \mathbb{R}^n$ classe C^1 a divergência de f é o campo escalar

$$\operatorname{div} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \qquad \operatorname{div} = \nabla \cdot f$$

$n=3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$



$$V: \begin{cases} x_0 \le x \le x_1 \\ y_0 \le y \le y_1 \\ z_0 \le z \le z_1 \end{cases}$$

$$\int_V \operatorname{div} f = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right]$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz \Big[\underbrace{f_1(x_1,y,z)}_{f\cdot n_1} - \underbrace{f_1(x_0,y,z)}_{f \cdot n_3} \Big] + \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{z_0}^{z_1} dz \Big[\underbrace{f_2(x,y_1,z)}_{f\cdot n_2} - \underbrace{f_2(x,y_0,z)}_{f\cdot n_5} \Big]$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \Big[\underbrace{f_3(x,y,z_1)}_{f\cdot n_4} - \underbrace{f_3(x,y,z_0)}_{f\cdot n_6} \Big] = \int_{\partial V} f \cdot n_{ext}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ domínio regular

Teorema da divergência: $f: D \cup \partial D \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 em D e contínua em $D \cup \partial D$ então

$$\int_D \operatorname{div} f = \int_{\partial D} f \cdot n_{ext}$$

onde $n_{ext}: \partial D \to \mathbb{R}^n$ é o campo das normais exteriores unitárias

é o integral de volume do campo escalar div em D

fluxo de f através de ∂D no sentido da normal n_{ext}

integral na var-$(n-1)$ ∂D do campo escalar $f \cdot n_{ext}$

Estamos a medir o quanto f aponta na direção e sentido de n