Teorema do valor intermédio

Em $\mathbb{R}$:

$f: \mathbb{R}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, f contínua

Se $f(a) < \alpha < f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b],\ f(c) = \alpha$

Em $\mathbb{R}^n$: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua e D conexo. Se f toma os valores α e β com $\alpha < \beta$ $\Rightarrow$ f toma também <u>todos</u> os valores intermédios γ, com $\alpha \leq \gamma \leq \beta$

Def: $A, B \subset \mathbb{R}$ dizem-se separados se $\exists$ aberto U, V com $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$

$\Leftrightarrow \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ //

Def: $W \subset \mathbb{R}^n$ diz-se conexo se não for a união de 2 conjuntos separados (não vazios)

Nota: Os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são: intervalos, conjuntos singulares

- Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^n$

f é diferenciável em $a \in I$ sse $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{\text{erro}}{R(x)}$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{R(x)}{x-a} \right) = 0$$

A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c/ $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ é a maior aproximação linear a f na vizinhança de $x = a$

Se $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a melhor aproximação linear a f na vizinhança de $a \in D$ será uma função linear: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ da forma $g(x) = f(a) + Df(a)(x-a)$ onde $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear e onde $Df(a)(x-a)$ é uma transformação linear do vector $(x-a) \in \mathbb{R}^n$ por $Df(a)$

Nas bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ $Df(a)$ é representado por uma matriz $m \times n$

$$Df(a) \cdot (x-a) = \begin{bmatrix} Df(a)_{11} & \cdots & Df(a)_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Df(a)_{m1} & \cdots & Df(a)_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$