$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$

f é diferenciável em a
$\Leftrightarrow \exists$ transformação linear $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
tal que a melhor transformação linear é

$$f(a) + Df(a)(x-a)$$

$$Df(a)(x-a) = \begin{bmatrix} Df(a)_{11} & \cdots & Df(a)_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Df(a)_{m1} & \cdots & Df(a)_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x-a)_1 \\ \vdots \\ (x-a_n) \end{bmatrix}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ aberto

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$

f é diferenciável em a
$\Leftrightarrow \exists$ transformação linear $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\| f(a+x) - f(x) - Df(a)x \|}{\|x\|} = 0$$

ex $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+y+z,\ 2y+z,\ -x+3z) \quad a \in \mathbb{R}^3$$

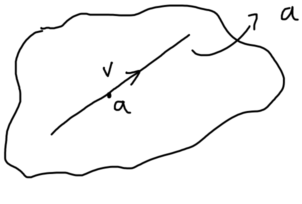
$$Df(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad f \text{ já é linear}$$

- Teorema: f é diferenciável em $a \in D$ sse todas as suas funções coordenadas $f_1, f_2, \dots, f_m$ forem diferenciáveis em a.

- Teorema: Se f é diferenciável em a então é contínua em a

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^n$ D Reta $a + vt$, $t \in \mathbb{R}$



$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \frac{d}{dt} f(a+tv)\Big|_{t=0}$$

Def: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D aberto, $a \in D$. A derivada de f segundo $v \in \mathbb{R}^n$ em a é definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \frac{d}{dt} f(a+tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

• Se $f = (f_1, \dots, f_m)$ então $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(a) \right)$

ex) $f(x,y) = (x^2 + y^3, xy + x)$

$v = (2,3)$ e $a = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dt} f((0,0) + t(2,3)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(2t, 3t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(4t^2 + 27t^3, 6t^2 + 2t) \Big|_{t=0}$$

$= (0,2)$ //

Derivadas parciais: derivadas de f segundo os vectores da base canónica e escrevem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(a) \qquad j = 1, \dots, n$$

ex) $f(x,y) = (e^x + \sin(y), x + \cos(y))$

$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^x, 1) \underset{(0,0)}{=} (1,1)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (\cos(y), -\sin(y)) \underset{y=0}{=} (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial (\lambda v)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$ //