Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ podemos considerar tudo constante e derivar a x_j

$$f(x,y) = x^2y + e^y \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + e^y$$

Teorema: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, com f diferenciável em a c/ derivada $Df(a)$ então, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a) \cdot v \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v}(a) \text{ é a imagem de } v \text{ por } Df(a)\right)$$

Logo se f é diferenciável em a, obtemos que a coluna j da matriz $m \times n$ $Df(a)$ é

$$Df(a) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \Rightarrow Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Matriz jacobiana de f em a

ex) $f(x,y) = (x^3y, e^{xy}, x)$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2y & x^3 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vimos se f é diferenciável e se $v = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

- A existência de todas as derivadas parciais de f em a NÃO garante que f é dif. em a

Teorema: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D aberto.

Se todas as derivadas parciais de f existem e são contínuas em D, ou seja, se f é de classe C^1 em D, então f é diferenciável em D.