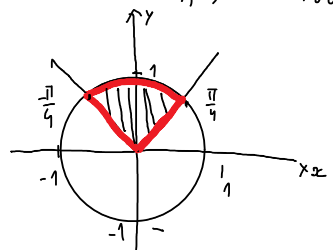
1. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (-2y, x)$ e o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \; ; \; y > |x|\}$. Calcule o trabalho realizado por F ao longo da fronteira do conjunto D no sentido anti-horário.

1) $F(x,y) = (-2y, x) \to$ Aberto



$g(t) = (t, t)$

$j(t) = (\cos(t), \sin(t))$

$l(t) = (t, -t)$

$$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}} F(g(t)) \cdot g'(t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} F(j(t)) \cdot j'(t)\, dt + \int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{0} F(l(t)) \cdot l'(t)\, dt =$$

$= -\frac{1}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}$ //

2. Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right).$$

Calcule o trabalho realizado por F ao longo de cada uma das linhas seguintes percorridas no sentido horário:

a) Circunferência definida pela equação $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

b) Circunferência definida pela equação $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

c) Elipse definida por $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

2) $\frac{\partial f_1}{\partial y} \neq \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow$ Aberto

a) $x + 1 = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ $\quad \theta \in [2\pi, 0]$ $\quad g(\theta) = (\cos(\theta) - 1, \sin(\theta))$

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

$G(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right) \to$ Roda da banheira

$H(x,y) = \left(\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right) \to$ "Anti" Roda da banheira

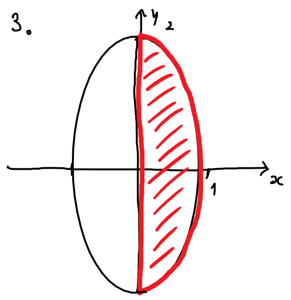
a) 2π

b) -2π

c) 0

3. Use o Teorema de Green para calcular a área do conjunto definido por $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \; ; \; x > 0$.

3.



$$A = \iint_D 1 \, dx\, dy = \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \, dx\, dy = \oint_{\partial D} f$$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ $\quad f(x,y) = (y, 2x)$

$g(\theta) = (\cos(\theta), 2\sin(\theta))$ $\quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad h(t) = (0, t)$ $\quad t \in [-2, 2]$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin(\theta), 2\cos(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), 2\cos(\theta))\, d\theta + \int_{2}^{-2} (t, 0) \cdot (0, 1)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^2(\theta) - 2\, d\theta + 0 = \pi$$

4. Considere a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1 \; ; \; z < 0 \; ; \; y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$. Seja $H(x, y, z) = (-y, x, z)$. Calcule o fluxo $\int_A H \cdot n$.

$x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$

$z = \rho^2 - 1 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{z+1}$

$z \in [-1, 0]$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho \in [0, \sqrt{z+1}]$

4) $\int_A H \cdot n = \int_A \operatorname{div} H = \int_A (0 + 0 + 1) = \int_A 1 =$ $\quad \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{0} \int_0^{\sqrt{z+1}} \rho \, d\rho\, dz\, d\theta = \pi \int_{-1}^{0} \frac{z+1}{2} dz = \pi \left[\frac{z(z+2)}{4} \right]_{-1}^{0} = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

5. Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$ através do cone definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \; ; \; 0 < z < 1,$$

orientado com a normal n com terceira componente positiva.

$\operatorname{div} F = 0 + 0 + 0 = 0$ $\quad \int_{\text{Cone}} 0 = 0$ //

6. Considere o campo $F(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$ em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Calcule o fluxo de F através da esfera de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

normal exterior unitária é (x, y, z)

$$\int_S F \cdot n = \int_S h(r)(x,y,z) \cdot (x,y,z) = h(1) \int_S \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}_{1} = h(1) \cdot 4\pi = 4\pi h(1)$$

7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \; ; \; z > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $F(x, y, z) = (x + y^2 + z, y - xy, z - x)$. Calcule o fluxo de F através de S no sentido de n, $\int_S F \cdot n$.

$\operatorname{div} F = 1 + 1 - x + 1 = 3 - x$ $\quad \begin{cases} x = \cos(\theta)\sin(\phi)\rho \\ y = \sin(\theta)\sin(\phi)\rho \\ z = \cos(\phi)\rho \end{cases}$

$\rho \in [0, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_S 3 - x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (3 - \cos(\theta)\sin(\phi)\rho)\, \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\phi)(8 - 4\sin(\phi)\cos(\theta))\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 16\pi \sin(\phi)\, d\phi = 16\pi$$

8. Calcule o volume do conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$ usando o teorema da divergência.

Seja $F(x,y,z) = (0, 0, z)$ $\quad \operatorname{div} F = 1$ $\quad \begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ \rho^2 < z < 1 \end{cases}$

$$\int_A \operatorname{div} F = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_{\rho^2}^{1} \rho \, dz\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \rho - \rho^3 \, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

9. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2 \; ; \; 0 < z < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $F(x, y, z) = (2xyz, z^2 - zy^2, z(1 - z))$. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S segundo a normal n.

$\operatorname{div} F = 2yz - 2yz + 1 - 2z = 1 - 2z$ $\quad \begin{cases} x = \cos(\theta)\rho \\ y = \sin(\theta)\rho \\ z = z \end{cases}$ $\quad \rho^2 = 1 + z^2$, $\rho = \sqrt{1+z^2}$

$$\int_S \operatorname{div} F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho(1 - 2z)\, d\rho\, d\theta\, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2z) \frac{(1+z^2)}{2} d\theta\, dz =$$

$$= \pi \int_0^1 1 - 2z + z^2 - 2z^3\, dz = \pi \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2} \right]_0^1 = \pi\left(1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\int_S \operatorname{div} F = \int S \cdot n + \int F \cdot n_T + \int F \cdot n_F$$

$$\int F \cdot n_F = \int F(x,y,0) \cdot (0,0,-1) = \int 0 = 0$$

$$\int F(x,y,1) \cdot (0,0,1) = \int 0 = 0$$

$e \; n_z > 0$ logo $-\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ //