1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$.

a) Mostre que f não é injectiva.

b) Determine um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em que f é injectiva.

c) Mostre que f tem inversa local em torno do ponto $(2,2)$.

d) Calcule $Df^{-1}(4,1)$, em que f^{-1} designa uma das funções inversas de f.

a) $f(1,0) = f(2,0)$

b) $2,1 \leq x \leq 2,2$

$2,1 \leq y \leq 2,2$

c) $Df = \begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}_{(2,2)} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\det Df = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \times 2\right) = 2$ Como $\det Df \neq 0$ logo pela TFI concluimos que f tem inversa local em $(2,2)$

d) $Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$

$f(x,y) = (4,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right]$

$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u = x + y + \operatorname{sen}(x-y) \\ v = 1 + \log(1+xy) - x. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (2, \log 2)$ e uma vizinhança de $(x,y) = (1,1)$ em que o sistema define (x,y) como função, de classe C^1, de (u,v) e calcule $\frac{\partial y}{\partial v}(2, \log 2)$.

$f(x,y) = (u,v)$

$Df = \begin{bmatrix} 1+\cos(x-y) & 1-\cos(x-y) \\ \frac{y}{1+xy} - 1 & \frac{x}{1+xy} \end{bmatrix} =$

$\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$

$\frac{\partial y}{\partial v}(2, \log 2) = 2$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]$

3. Mostre que a equação $y \operatorname{sen}(x+y) = 0$ define, implicitamente, x como função de y em alguma vizinhança do ponto $(0,\pi)$ e calcule a derivada $\frac{dx}{dy}(\pi)$. Confirme o resultado explicitando x como função de y.

$f(x,y) = y \operatorname{sen}(x+y) = 0$

$DF(x,y) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \underbrace{y\cos(x+y)}_{x} & \underbrace{\operatorname{sen}(x+y) + y\cos(x+y)}_{y} \end{bmatrix} \end{array} \to [-\pi \quad -\pi]$

$(0,\pi)$

$\pi \cos(0+\pi) \neq 0$

Logo pelo TFImp temos que na vizinhança de $(0,\pi)$ os pontos são da forma $x = f(y)$

$\varphi(y) = (f(y), y)$

$DF(\varphi(\pi)) \cdot D\varphi(\pi) = 0$

$DF(0,\pi) \cdot D\varphi(\pi) = 0$

$\Rightarrow [-\pi \quad -\pi] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(\pi) \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$-\pi \cdot \frac{\partial f(\pi)}{\partial y} - \pi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial y}(\pi) = -1$

4. Mostre que a equação $2z + x^2z^5 + y^2x^3 + xy = 2$ define implicitamente z como função de x e de y, em torno do ponto $(0, 0, 1)$. Calcule a derivada $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

$F = 2z + x^2z^5 + y^2x^3 + xy - 2$

$F(0,0,1) = 0$

$DF = \begin{bmatrix} 2xz^5 + 3x^2y^2 + y & 2yx^3 + x & 2 + 5x^2z^4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$2 + 5x^2z^4 \Big|_{(0,0,1)} = 2 + 0 = 2 \neq 0$

Logo pelo TFImp temos que na vizinhança de $(0,0,1)$ os pontos são da forma $z = f(x,y)$

$F = 2f(x,y) + x^2 f(x,y)^5 + y^2x^3 + xy - 2$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2x f(x,y)^5 + x^2 5 f(x,y)^4 \frac{\partial f}{\partial x} + 3x^2y^2 + y = 0$

$\hookrightarrow 0,0$

$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot x^2 \cdot f(x,y)^4 \cdot \frac{f(x,y)}{\partial y} + 2yx^3 + x = 0$

$\Big|_{0,0}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial x} + 2x f(x,y)^5 + x^2 5 f(x,y)^4 \frac{\partial f}{\partial x} + 3x^2y^2 + y\right) = 0 \iff$

$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)^5\right) + x^2 5 \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y)^4 \frac{\partial f}{\partial x}\right) + 6x^2y + 1 = 0 \iff 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 \iff \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}$ //

5. Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ y^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z = 1. \end{cases}$$

a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$, o conjunto S é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.

b) Calcule $f'(0)$.

$f_1(x,y,z) = y^2 + z^2 - x^2 - 1$

$f_2(x,y,z) = y^2 + \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(z) - 1$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

a)

$F(f_1, f_2)$

$D_F = \begin{bmatrix} -2x & 2y & 2z \\ \cos(x) & 2y & \cos(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$y = g_1(x)$

$z = g_2(x)$

Logo pelo TFImp temos que na vizinhança de $(0,1,0)$ os pontos são da forma $\begin{cases} y = g_1(x) \\ z = g_2(x) \\ x = x \end{cases}$

b) seja $\varphi(x) = \begin{cases} g_1^2(x) + g_2^2(x) = x^2 + 1 \\ g_1^2(x) + \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(g_2(x)) = 1 \end{cases}$

$\varphi'(0) = \begin{cases} 2\frac{dg_1}{dx}(0)\, g_1(0) + 2\frac{dg_2}{dx}(0)\, g_2(0) = 2 \cdot 0 \\ 2\frac{dg_1(0)}{dx} g_1(0) + \cos(x) + \frac{dg_2(0)}{dx}\cos(g_2(x)) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dg_1}{dx}(0) = 0 \\ \frac{dg_2}{dx}(0) = -1 \end{cases}$

6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \neq 0, \ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \neq 0, \ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0.$$

Mostre que a equação $F(x, y, z) = 0$ determina localmente cada uma das variáveis como função, de classe C^1, das restantes e que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}(y, z)\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}(x, z)\right) = -1.$$

Não quero//