5. Indique, justificadamente, se o domínio das seguintes funções é um conjunto aberto, fechado, limitado ou compacto:

(a) $f(x,y) = \frac{x\log(1+x^2-y)}{y}$

(b) $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{1-(x^2+y^2)}$

(c) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{x-z}$

(d) $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2-y} + \sqrt{1-x^2-y^2}, e^x, \log(z))$

a) $\begin{cases} y \neq 0 \\ 1+x^2-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ x^2+1>y \end{cases}$

Aberto

b) $1-(x^2+y^2) \neq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \neq 1$

Aberto

c) $\begin{cases} x-z \neq 0 \\ y-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq z \\ y \geq x^2 \end{cases}$

Não é aberto nem fechado

d) $\begin{cases} z>0 \leftarrow \text{aberto} \\ x^2 \geq y \\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \leftarrow \text{fechado} \end{cases}$

Não é aberto nem fechado

6. Estude os seguintes limites

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+3}{1-2y}$$

(c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

a) Seja $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+m^2x^2}{mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}(1+m)}{\cancel{x}\, m} = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1+m}{m}\right) = 0$$

$y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1+x^2 = 1$$

N. há limite

b) $$\lim_{x,y\to(0,1)} \frac{x^2+3}{1-2y} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) $$\lim_{x,y\to 0,0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$$

$0 \times \text{limitada} = 0$

7. Estude a continuidade das seguintes funções no seu domínio

(a) $f(x,y) = \cos(1+\sqrt{x^2+y^2})$

(b) $f(x,y) = (x^3e^{x+y}, \frac{xy}{1+x^2})$

(c) $f(x,y) = (\operatorname{tg}(x), \frac{xy}{x^2-2})$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x \neq 0 \\ 2y-1, & x=0 \end{cases}$

a) $x^2+y^2 \geq 0 \leftarrow$ P.V.

Logo $f(x,y)$ é contínua em todo o seu domínio ($\mathbb{R}^2$)

b) $1+x^2>0 \leftarrow$ P.V.

Logo $f(x,y)$ é contínua em todo o seu domínio ($\mathbb{R}^2$)

c) $x \neq \frac{k\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

$x^2-2 \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f(x,y)$ contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}^2 \setminus x = \pm\sqrt{2}$, $x = \frac{k\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

d) Não é contínua em $x=0 \wedge y \neq 1$

$y^2 = 2y-1$

8. Mostre que a função

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}$$

é prolongável por continuidade à origem e determine o seu prolongamento.

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x^3|+|y^5|}{x^2+y^4} = \frac{|x|x^2+|y|y^4}{x^2+y^4} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\cancel{(x^2+y^4)}}{\cancel{(x^2+y^4)}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[x,y\to 0,0]{} 0$$