NOTA:

Para ver se f é diferenciável num ponto a

f é contínua em a? $\xrightarrow{F}$ **Não é dif. em a**

$\downarrow$ V

As derivadas parciais existem? $\xrightarrow{F}$ **Não é dif. em a**

$\downarrow$ V

As derivadas parciais são contínuas em a? $\xrightarrow{V}$ **É dif. em a**

$\downarrow$ F

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Df(a) \cdot h \|}{\| h \|} = 0$$

$\xrightarrow{V}$ **É dif. em a**

$\xrightarrow{F}$ **Não é dif. em a**

1. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\frac{-y^3}{3x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(a) Calcule as derivadas parciais de f na origem.

(b) Estude a diferenciablidade de f na origem.

(c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

1 a) $\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$

$\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=-1$

$\to [0\ \ -1]\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$

b) $\lim_{h\to0}\frac{\|f((0,0)+h)-f(0,0)-Df(0,0)\cdot h\|}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{f(h_1,h_2)+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=$

$\lim_{h\to0}\frac{-h_2^3+h_2(3h_1^2+h_2^2)}{3h_1^2+h_2^2(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}=\lim_{h\to0}\frac{3h_1^2h_2}{(3h_1^2+h_2^2)(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}$

Caso $h_2=h_1$

$\frac{3h^3}{4h^2\times\sqrt{2h^2}}=\frac{3}{4\sqrt2}$

$h_2=0$

0

Logo como $0\neq\frac{3}{4\sqrt2}$ f não é diferenciável em $(0,0)$

c) $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{6xy^3}{(3x^2+y^2)^2}\xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{}0$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{-3y^2}{3x^2+y^2}+\frac{2y^4}{(3x^2+y^2)^2}\xrightarrow[(x,y)\to(1,2)]{}\frac{-3\times4}{3+4}+\frac{2\times16}{(3+4)^2}=\frac{-12}{7}+\frac{32}{49}=\frac{-52}{49}$

2. Seja $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(a) Calcule, caso exista, a derivada de f na origem.

(b) Diga, justificadamente, se a função é de classe C^1.

a) $\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$

$\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$

b) Não é de classe C_1 pois $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\operatorname{sen}\left(\frac1x\right)-\cos\left(\frac1x\right)$

se $x\to0$ então $\frac{\partial f}{\partial x}=$ N.D. Logo f não é de classe C_1

3. Seja $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y,z)=(\cos yz, xyz, \frac{1}{z})$ se $z\neq0$, e $g(x,y,0)=(1,0,0)$. Calcule a derivada de g na origem, caso esta derivada exista.

3. $\frac{d}{dt}f(t,0,0)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}(1,0,0)\Big|_{t=0}=(0,0,0)$

$\frac{d}{dt}f(0,t,0)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}(0,1,0)\Big|_{t=0}=(0,0,0)$

$\frac{d}{dt}f(0,0,t)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\cos(0),0,\frac1t\right)\Big|_{t=0}=(0,0,-\infty)$

Não existe derivada

4. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(a) Indique o conjunto dos pontos onde f é diferenciável, e calcule a derivada nesses pontos.

(b) Calcule $D_vf(0,0)$ para qualquer vector $v=(\alpha,\beta)$.

(c) Calcule $D_vf(1,1)$ para qualquer vector $v=(\alpha,\beta)$.

a) $\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$

$\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$

$\lim_{h\to0}\frac{\|f(h_1,h_2)-0-Df(0,0)\cdot h\|}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{|h_1|h_2^2}{(h_1^2+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

Caso $h_1=h_2$

$\frac{h_1^3}{(h_1^2+h_1^4)\sqrt{2h_1^2}}=\frac{1}{(1+h_1^2)\sqrt2}\neq0$ Logo f não é diferenciável em $(0,0)$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x)=\frac{2yx}{x^2+y^4}-y^2\frac{4y^3}{(x^2+y^4)^2}=$

$=\frac{2x^3y-2xy^5}{(y^4+x^2)^2}$

$Df(x,y)=\left[\frac{y^6-y^2x^2}{(x^2+y^4)^2}\quad \frac{2xy-2xy^5}{(y^4+x^2)^2}\right]$

$\boxed{x,y\to1,1}$

b) $[0\ \ 0]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=0$

c) $[0\ \ 0]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=0$

5. Seja $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(b) Calcule $D_v f(0,0)$ onde $v=(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$, $\theta\in[0,2\pi]$.

(c) Diga, justificadamente, se f é diferenciável na origem.

6. Dada $f(x,y,z)=(x^2-y, xy+z+e^x)$ e $v=(1,1,1)$, calcule $D_v f(2,0,1)$.

5 a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt}\left(f(t,0)\right)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dt}\left(f(0,t)\right)\Big|_{t=0} = 0$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dt}\left(f(\cos(\theta)t, \sin(\theta)t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\sqrt[3]{\cos^2(\theta)t^3\sin(\theta)}\Big|_{t=0} = \sqrt[3]{\cos^2(\theta)\sin(\theta)} //$$

c) $$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(h_1,h_2) - \overset{\nearrow 0}{f(0,0)} - \overset{\nearrow 0}{\overline{Df(0,0)\cdot h}}\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h_1^2h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$h_1=h_2$

$$\frac{\sqrt[3]{h_1^3}}{h_1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$ Logo não é dif. na origem.

6) $$\frac{\partial f}{\partial v}(2,0,1) = \frac{d}{dt}f(2+t,t,1+t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left((2+t)^2-t,\ (2+t)t+1+t+e^{2+t}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(t^2+3t+4,\ 3t+t^2+1+e^{2+t}\right)\Big|_{t=0} = \left(2t+3, 2t+3+e^{t+2}\right)\Big|_{t=0} = (3, 3+e^2)$$

7. Seja $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $D_v\phi(0,0)=1$ e $D_w\phi(0,0)=3$, sendo $v=(1,2)$ e $w=(0,1)$. Determine a matriz Jacobiana $D\phi(0,0)$.

7) $$\begin{cases}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=1\\ \begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta=1\\ \beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-5\\ \beta=3\end{cases}$$

$$D\phi(0,0) = \begin{bmatrix}-5 & 3\end{bmatrix}$$

8. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável na origem e tal que

$$f(t,t)=t^3+t,\ \ f(t,-2t)=2t.$$

Calcule $D_v f(0,0)$ onde $v=(1,3)$.

8) $$\begin{cases}1=x_1+x_2\\ 3=x_1-2x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=3+3x_2\\ x_1=3+2x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{2}{3}=x_2\\ x_1=\frac{5}{3}\end{cases}$$

Logo $f(t,3t) = \frac{5}{3}f(t,t) - \frac{2}{3}f(t,-2t) =$

$$= \frac{5}{3}(t^3+t) - \frac{4t}{3} = \frac{5}{3}t^3 + \frac{t}{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}t^3+\frac{t}{3}\right)\Big|_{t=0} = 5t^2+\frac{1}{3}\Big|_{t=0} = \frac{1}{3}$$

6.V2)

$$\begin{bmatrix}2x & -1 & 0\\ y+e^x & x & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ e^2 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$x,y,z\to 2,0,1$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix}3\\ 3+e^2\end{bmatrix}$$

12)

9. Poderá existir uma função f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - y$?

$\int x+4y\,\partial x = \frac{x^2}{2} + 4yx + C$

$\neq$

$\int 3x - y\,\partial x = -\frac{x^2}{2} + 3xy + C$

Não pode existir

10. **(Propriedades da derivada segundo um vector)** Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, A aberto. Suponhamos que existem (finitas) $D_v f(p)$ e $D_v g(p)$ para um dado $v \in \mathbb{R}^N$. Prove que

(a) $D_v(f+g)(p) = D_v f(p) + D_v g(p)$

(b) $D_v(fg)(p) = D_v f(p) g(p) + f(p) D_v g(p)$

(c) Se g não se anular numa vizinhança de p então

$$D_v(f/g)(p) = \frac{D_v f(p) g(p) - D_v g(p) f(p)}{[g(p)]^2}$$

(d) $D_{cv}(f)(p) = c D_v(f)(p)$, $c \in \mathbb{R}$

10) a) $D_v(f+g)(p) = \frac{d}{dt}(f+g)(vt+p)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(f(vt+p) + g(vt+p)\Big)\Big|_{t=0}$

$= \frac{d}{dt} f(vt+p)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} g(vt+p)\Big|_{t=0} = D_v f(p) + D_v g(p)$

(o mesmo para o resto)

11. Dê um exemplo que mostre como em geral $D_{v_1+v_2} f(p) \neq D_{v_1} f(p) + D_{v_2} f(p)$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função tal que as suas derivadas parcias de primeira ordem são limitadas numa vizinhança de um ponto $p \in \mathbb{R}^N$. Prove que f é contínua em p. [Sugestão: Use o Teorema de Lagrange de CDI-II convenientemente.]

11) $P = (0,0)$

$f = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$v_1 = (1,0)$

$v_2 = (0,1)$

$v = v_1 + v_2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{0}{t}\right)\Big|_{t=0} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{0}{t}\right)\Big|_{t=0} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dt} f(t,t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\frac{t^2}{t\sqrt{2}}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 + 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

13. Seja $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $p = (p_1, ..., p_k)$. Suponhamos que $Dg(p) = (a_1, ..., a_k)$, $a_i \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N \geq k$ definida por

$$f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_k).$$

Prove que f é diferenciável em todos os pontos x da forma $(p_1, ..., p_k, x_{k+1}, ..., x_N)$ e que

$$\nabla f(x) = (a_1, ..., a_k, 0, ..., 0).$$

13)