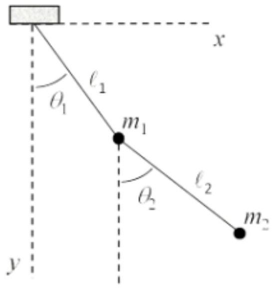
$$V_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}$$

P 2.1.

Determine a função de Lagrange do um pêndulo duplo oscilante num plano com massas m_1 e m_2 (ver figura) e comprimentos, respectivamente, ℓ_1 e ℓ_2.



Posição

$x_1 = \sin(\theta_1)\, l_1$ $\qquad x_2 = x_1 + \sin(\theta_2)\, l_2$

$y_1 = -\cos(\theta_1)\, l_1$ $\qquad y_2 = y_1 - \cos(\theta_2)\, l_2$

Velocidade

$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)$ $\qquad \dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1)$

$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)$ $\qquad \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)$

$L = T - U$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

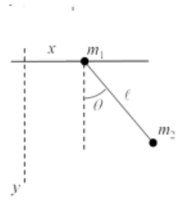
$$U = m_1 g(-\cos(\theta_1)\, l_1) + m_2 g(-\cos(\theta_1)\, l_1 - \cos(\theta_2)\, l_2) =$$

$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g l_2 \cos(\theta_2)$$

P 2.2.

Determine a função de Lagrange do um pêndulo plano de massa m_2 cujo ponto de suspensão de massa m_1 pode deslocar-se sobre uma recta horizontal (ver figura)



Posição

$x_1 = x_1$ $\qquad x_2 = x_1 + l \sin(\theta)$

$y_1 = 0$ $\qquad y_2 = -l \cos(\theta)$

Velocidade

$\dot{x}_1 = \dot{x}_1$ $\qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\theta}\, l \cos(\theta)$

$\dot{y}_1 = 0$ $\qquad \dot{y}_2 = \dot{\theta}\, l \sin(\theta)$

$\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\theta}\, l \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2$

$L = T - U$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left((\dot{x}_1 + \dot{\theta}\, l \cos(\theta))^2 + (\dot{\theta}\, l \sin(\theta))^2 \right) =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (2\dot{x}_1 \dot{\theta}\, l \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2)$$

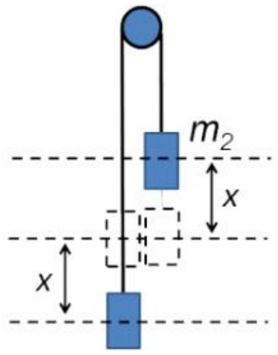
$U = -m_2 g\, l \cos(\theta)$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (2\dot{x}_1 \dot{\theta}\, l \cos(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2) + m_2 g\, l \cos(\theta)$$

A "máquina de Atwood" é composta por duas massas diferentes, suspensas nas extremidades de um fio inextensível, nos dois lados de uma roldana de massa desprezável. A roldana pode girar livremente, de forma que a massa de valor mais elevado (m_1) desce e a massa de valor mais baixo (m_2) sobe devido à respectiva diferença de pesos.

d) Quantos graus de liberdade tem o sistema? Escreva a função de Lagrange do sistema considerando que as duas massas iniciam o seu movimento colocadas à mesma altura.

e) Deduza a equação diferencial que descreve o movimento das massas partindo da equação de Lagrange.



a) 2 massas × 1 dimensão − 1 constrangimento (roldana) = 1 G.L.

$L = T - U$

Posição

$x = x_1 = -x_2$

Velocidade $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$ logo $\dot{x}_1^2 = \dot{x}_2^2 = \dot{x}^2$

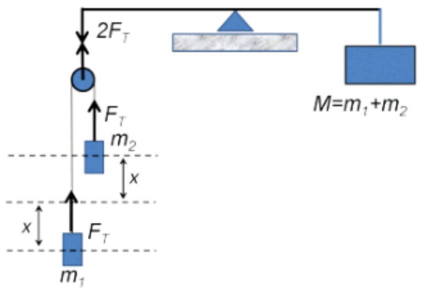
$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$U = m_2 g x - m_1 g x$

$\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x$

b) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow (m_1 - m_2) g - (m_1 + m_2) \ddot{x} = 0$

Considere a máquina de Atwood, descrita no problema anterior, pendurada num dos braços da balança representada na figura. Se bloquear a roldana o sistema pendurado na balança é equilibrado por uma massa $M = m_1 + m_2$. Determine o sentido de inclinação da balança no caso em que a roldana é desbloqueada.



Desequilibra-se para a direita pois deixa de haver tensão no lado esquerdo (pois a roldana fica solta) logo o peso puxa a balança para a direita.

$F_d = M \times g = F_e = 2 F_T$

$2T = \frac{4 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

$\Delta F = (m_1 + m_2) g - \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g$

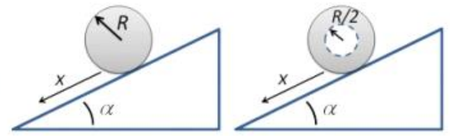
Logo a F_T diminui fica $2F_T < F_d$ logo cai para direita

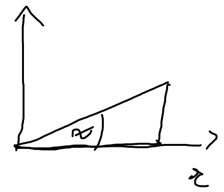
Uma esfera de massa M e raio R rola sem deslizar ao longo de um plano de inclinação α.

a) Determine a energia cinética e a energia potencial do sistema (despreze as forças de atrito). (Momento de inércia da esfera $I = (2/5)MR^2$)

b) Escreva a função de Lagrange do sistema e determine a aceleração do movimento da esfera.

c) Mostre que a aceleração diminui no caso de existir no interior da esfera uma cavidade esférica concêntrica de raio $R/2$.





a) $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}^2}{R^2}$

$U = m g x \sin(\theta)$

b) $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{I}{R^2}\right) - m g x \sin(\theta)$

$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$-m g \sin(\theta) - \ddot{x}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{m g \sin(\theta)}{m + \frac{I}{R^2}} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{5}{7} g \sin(\theta)$

c) $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$V' = V - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = V - \frac{1}{8} V = \frac{7}{8} V$

$\frac{m}{V} = \frac{m'}{V'} \Leftrightarrow m' = \frac{7}{8} m$

$I = \frac{2}{5} m R^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{m}{8}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{2}{5} m \left(R^2 - \frac{R^2}{32}\right) = \frac{31}{80} m R^2$

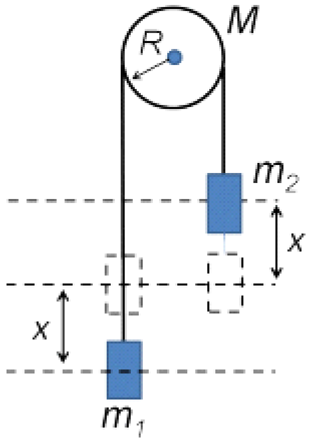
$-\frac{7}{8} m g \sin(\theta) - \ddot{x}'\left(\frac{7}{8} m + \frac{I}{R^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}' = -\frac{\frac{7}{8} m g \sin(\theta)}{\frac{7}{8} m + \frac{31}{80} m} \Leftrightarrow \ddot{x}' = -\frac{70}{101} g \sin(\theta)$

$\frac{70}{101} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 490 < 505$ P.V.

$\ddot{x}' < \ddot{x}$

P 2.6. ("Física para Engenheiros" M. Rogalski, A. Ferraz, Escolar Editora, 2011)

Considere duas massas m_1 e m_2 suspensas nas extremidades de um fio inextensível, de massa desprezável que passa por uma roldana de massa M e raio R (momento de inércia da roldana $I = (1/2)MR^2$). Escreva a função de Lagrange do sistema e determine a aceleração do movimento.



2.6) $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times M \times \cancel{R^2} \times \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}}} =$

$= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M)$

$U = -m_1 g x + m_2 g x = -(m_1 - m_2) g x$

$\mathcal{L} = T - U$

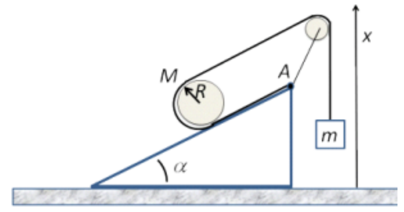
$= \frac{1}{2} \dot{x}^2 (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M) + (m_1 - m_2) g x$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow (m_1 - m_2) g - \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M}$ //

P 2.7. ("Física para Engenheiros" M. Rogalski, A. Ferraz, Escolar Editora, 2011)

Um cilindro homogéneo de massa M e raio R pode rolar sem deslizar ao longo duma cunha fixa de inclinação α. Um fio inextensível com uma extremidade fixa no topo da cunha (ponto A), enrolado em torno do cilindro passa por uma roldana de massa desprezável e tem um corpo de massa m pendurado na outra extremidade.



c) Escreva a função de Lagrange do sistema utilizando a coordenada x representada na figura (sugestão: repare que, nas condições do problema, quando a massa m se desloca de uma altura x, a massa M desloca-se de um comprimento x/2 ao longo do plano inclinado).

d) Escreva a equação do movimento do corpo m e determine a sua solução.

e) Calcule o ângulo α necessário para que o sistema permaneça em equilíbrio.

c) $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \cdot \frac{\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2}{\cancel{R^2}}$

$U = mgx - Mg \frac{x}{2} \sin(\alpha)$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{8} M \dot{x}^2 + \frac{1}{16} M \dot{x}^2 - xg(m - \frac{M}{2} \sin(\alpha))$

d) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{M}{2} \sin(\alpha) - m\right) g - \ddot{x}\left(m + \frac{1}{4} M + \frac{1}{8} M\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{\left(\frac{M}{2} \sin(\alpha) - m\right) g}{m + \frac{3}{8} M}$

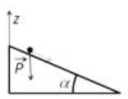
$A + Bt + \ddot{x} t^2 = 0$

e) $\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{M}{2} \sin(\alpha) - m\right) \cancel{g} = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{2m}{M}$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{2m}{M}\right)$

P 2.8. (Problema 1 do 2º Exame 2013/14)

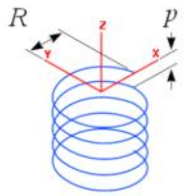
Um corpo pontual de massa m desliza sem atrito, sujeito ao seu próprio peso (força na direcção $-z$), ao longo de um plano inclinado com um ângulo de inclinação α.



a) Mostre que a componente da aceleração do corpo segundo a direcção vertical ($a_z = \ddot{z}$) é dada por: $a_z = \ddot{z} = -g\sin^2\alpha$.

b) Considere agora que o mesmo corpo desliza sem atrito, sujeito ao seu próprio peso, ao longo de uma rampa em forma de hélice (ver figura). Esta curva pode ser descrita, em função do parâmetro z (coordenada na direcção vertical) pelas seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ y = R\sin\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ z = z \end{cases}$$



R é o raio da hélice e p é o respectivo passo (distância de repetição na direcção vertical).

i) Mostre que o módulo da velocidade do corpo no seu movimento ao longo da hélice pode ser dado, em função da coordenada z, por:

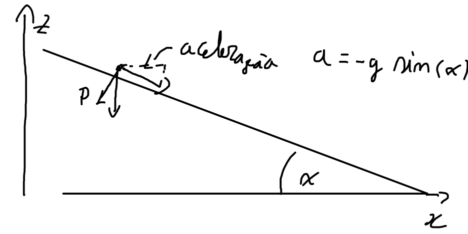
$$v = |\dot{z}|\sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2 R^2}{p^2}\right)}$$

ii) Determine a função de Lagrange do sistema (massa pontual m) em função da variável z.

c) Determine a equação diferencial do movimento na variável z.

d) Utilizando os resultados da alínea a) e da alínea c) mostre que o movimento ao longo de um troço desta curva correspondente a um passo da hélice ($\Delta z = z_f - z_i = p$) é análogo ao movimento ao longo de um plano inclinado com um comprimento correspondente ao comprimento medido ao longo da hélice e altura z (sugestão: imagine a hélice desenhada num cilindro cuja superficie lateral pode ser "desenrolada").

a) $\longrightarrow$



$a = -g\sin(\alpha)$ e tem componente em z e x

$$a_z = a\sin(\alpha) = -g\sin^2(\alpha)$$

H) $\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ y = R\sin\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ z = z \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{R2\pi\dot{z}}{p}\sin\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ \dot{y} = \frac{R2\pi\dot{z}}{p}\cos\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$V = \sqrt{\dot{z}^2\left(\frac{R2\pi}{p}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi z}{p}\right) + \dot{z}^2\left(\frac{R2\pi}{p}\right)^2\cos^2\left(\frac{2\pi z}{p}\right) + \dot{z}^2} =$$

$\rightarrow 1 \leftarrow$

$$= |\dot{z}|\sqrt{1 + \frac{4\pi^2R^2}{p^2}}$$

ii) $T = \frac{1}{2}m \cdot \dot{z}^2 \cdot \left(1 + \frac{4\pi^2R^2}{p^2}\right)$

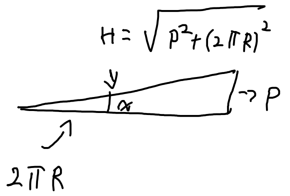
$U = mgz$

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\left(1 + \frac{4\pi^2R^2}{p^2}\right) - mgz$

c) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}\right) = 0 \Leftrightarrow -\cancel{m}g - \cancel{m}\ddot{z}\left(1 + \frac{4\pi^2R^2}{p^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot{z} = -\frac{g}{1 + \frac{4\pi^2R^2}{p^2}} = -g\left[\frac{p}{\sqrt{p^2 + (2\pi R)^2}}\right]^2$

d)



$\leftarrow$ "Desenrolar" um passo da mola

$\sin(\alpha) = \frac{CO}{H} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + (2\pi R)^2}}$ logo $\ddot{z} = -g\left[\frac{p}{\sqrt{p^2 + (2\pi R)^2}}\right]^2 = -g\sin^2(\alpha)$