P 4.1. ("Introdução à Física", J. Dias de Deus et al., McGraw Hill, 2000)

Um satélite descreve uma órbita circular junto à superfície da Terra.

a) Mostre que a velocidade desse satélite é dada por $v = \sqrt{Rg_R}$ em que R é a distância ao centro da Terra e g_Ré a aceleração da gravidade a essa distância.

b) Sabendo que o período de um satélite geo-estacionáro é de 23 h 56 min., calcule a altitude da respectiva órbita circular. ($M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6{,}378 \times 10^6$ m).

$F_{grav} = F_{cp} \Leftrightarrow -\frac{GMm}{R^2} = m \times g_T \Leftrightarrow -\frac{GM}{R^2} = -\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Leftrightarrow v = \sqrt{R g_R}$

$F_g = G\frac{mM}{R^2}$ $\quad g_R = \frac{GM}{R^2}$

b) 23h 56min = 86160 s

$\begin{cases} P = 2\pi(x + R_T) \\ v = \sqrt{\frac{GM_T}{x + R_T}} \\ \frac{P}{v} = 86160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v\,86160 = 2\pi(x + R_T) \\ v = \sqrt{\frac{GM_T}{x+R_T}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{GM_T}{x+R_T}} = \frac{2\pi(x+R_T)}{86160} \\ - \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{GM_T} = \frac{2\pi(x+R_T)^{3/2}}{86160} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{GM_T} \cdot 86160}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - R_T = x \\ - \end{cases} \Leftrightarrow x = 3{,}6 \times 10^7 \text{ m}$

P 4.2. ("Introdução à Física", J. Dias de Deus et al., McGraw Hill, 2000)

Sabendo que a lei da atracção universal entre duas massas pontuais M e m, distanciadas de r é dada por $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$:

a) Mostre que, para pequenos deslocamentos junto da superfície da Terra se tem a energia potencial $U = mgh$, sendo h a distância do ponto em relação à superfície da Terra.

b) Calcule a diferença entre o potencial gravítico aproximado e o exacto a 60 km de altitude.

$F_g = -G\frac{mM}{(R+x)^2} \Leftrightarrow g_R = \frac{GM}{(R+x)^2} \Leftrightarrow g = -\frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow g = -9{,}8 \text{ m/s}$

$x \ll R$

g_R à superfície

$E_{p_g} = -G\frac{Mm}{(R+x)} \times \frac{(R+x)}{(R+x)} =$

constante logo

$= -\frac{GM}{(R+x)^2} \times m \times (R+x) = g \times m \times (R+x) = gmR + gmx = gmh = U$

b) $U = g \cdot m \cdot 60\text{km}$ $\quad \frac{U}{E_{p_g}} = \frac{g \cdot (R + 60\,000)}{-G \cdot \frac{M}{R + 60\,000}} = 1{,}01836$

$E_{p_g} = -G\frac{Mm}{R + 60\text{Km}}$

$E_{p_g} = 0{,}98\,U$

P 4.3. ("Introdução à Física", J. Dias de Deus et al., McGraw Hill, 2000)

A Lua tem um período de 27,3 dias e um raio orbital de 3,84x10[5] km. Se um satélite tem o período de 1 dia, qual é o seu raio orbital?

$F_g = F_c$

$\Leftrightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$!

$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$v = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$

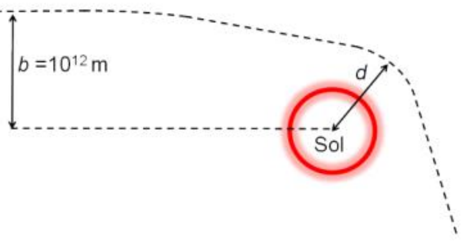
$\frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{R_L^3}{R_S^3} \Leftrightarrow (27{,}3)^2 = \frac{(3{,}84 \times 10^5)^3}{x^3} \Leftrightarrow x = 42\,353{,}5 \text{ Km}$

P 4.4. ("Introdução à Física", J. Dias de Deus et al., McGraw Hill, 2000)

Qual a energia cinética de um satélite artificial de massa *m* numa orbita circular com um raio duplo do raio de Terra?

$v = \sqrt{\frac{GM}{2R_T}}$ $\quad E_c = \frac{1}{2} \times m \times \sqrt{\frac{GM}{2R_T}}^{\,2} = \frac{GMm}{4R_T}$

P 4.5. ("Introdução à Física", J. Dias de Deus et al., McGraw Hill, 2000)



Um meteoro aproxima-se do Sol. A grande distância a sua velocidade é de 500 m/s estando apontado a 10^{12}m do centro do Sol (ver figura).

a) Determine a distância mínima a que o meteoro passa do centro do Sol.

b) Que velocidade tem o meteoro quando passa no ponto mais próximo do Sol?

c) Sabendo que o raio do Sol é de $6{,}95\times10^8$ m, que valor mínimo pode ter o parâmetro de impacto b para que o meteoro não caia no Sol? Sugestão: repare que o momento angular inicial do meteoro é mvb. Porquê?

a) $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m m_S}{R} = \frac{1}{2}m v_i^2$

$\vec{L} = \vec{R}\times\vec{p} = |R|\,|mv_i|\sin(\theta) = m v_i b$

$\cancel{m} v_i b = \cancel{m}|V|\sin(\theta) R \iff |V| = \frac{v_i b}{R\sin(\theta)}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m m_S}{R} = \frac{1}{2}m v_i^2 \\ |V| = \frac{v_i b}{R\sin(\theta)} \end{cases} \iff \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{v_i^2 b^2}{\sin^2(\theta)} - G\cancel{m} m_S R = \frac{1}{2}\cancel{m} v_i^2 R^2$

$\frac{1}{2}v_i^2R^2 + Gm_SR - \frac{1}{2}\frac{v_i^2 b^2}{\sin^2(\theta)} = 0$

$$R = \frac{-Gm_S \pm\sqrt{G^2m_S^2 + \frac{v_i^3 b^2}{\sin^2\theta}}}{v_i^2}$$

$\frac{dR}{d\theta} = 0 \iff$ Derivando $\Rightarrow \frac{dR}{d\theta} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\times a\times c}}{2\times a}$$

$R = 9.42\times10^8$ m

b) $V = \frac{v_i b}{R\sin(\theta)} \iff V = \frac{500\cdot10^{12}}{9.42\times10^8\times\sin(\frac{\pi}{2})} = 530786\,m/s = 530\,Km/s$

c) $\frac{1}{2}v_i^2R^2 + Gm_SR - \frac{1}{2}\frac{v_i^2 b^2}{\sin^2(\theta)} = 0$ $\quad R = 6{,}95\times10^8$ m $\quad b = ?$

$\iff$

$\sqrt{\frac{2\sin^2(\theta)\cdot\left(\frac{1}{2}v_i^2R^2 + Gm_SR\right)}{v_i^2}} = b \iff b = 8{,}59\times10^{11}$

Pretende-se enviar uma cápsula para a Lua colocando-a num canhão, à superfície terrestre, e imprimindo-lhe uma determinada velocidade inicial – uma velha ideia de Júlio Verne! Suponha que o atrito entre a cápsula e a atmosfera era desprezável. (Na realidade esta hipótese seria aceitável?)

a) Calcule como varia a energia potencial do conjunto Terra + Lua ao longo de uma recta que une o centro dos dois planetas. Exprima-a em função da distância da cápsula à Terra, r, e esboce o gráfico da energia potencial.

b) É possível encontrar ao longo da linha definida na alínea a) um ponto para o qual as forças atractivas da Terra e da Lua se igualam? Qual é essa posição?

c) Que aconteceria à cápsula se fosse colocada no ponto definido na alínea b) com velocidade exactamente igual a zero? Se um pequeno asteróide perturbar a cápsula ao passar, esta manter-se-á próxima da posição onde estava?

d) Qual a velocidade mínima que era preciso fornecer à cápsula para que esta fosse da Terra à Lua?

e) Calcule a velocidade de escape da cápsula sem considerar a influência da Lua. O valor obtido é maior, menor ou igual do que o da alínea d)?

a) $\left.\begin{array}{l} U_T = -G\frac{mM_T}{r} \\ U_L = -G\frac{mM_L}{d-r}\end{array}\right\} U = U_T + U_L = -Gm\left(\frac{M_T}{r} + \frac{M_L}{d-r}\right)$

Desenho?

b) $F = 0 \iff F_T + F_L = 0$

$\left.\begin{array}{l} F_T = G\frac{M_T m}{r^2} \\ F_L = G\frac{M_L m}{(d-r)^2}\end{array}\right\} \cancel{G}\frac{M_T\cancel{m}}{r^2} = \cancel{G}\frac{M_L\cancel{m}}{(d-r)^2} \iff \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = \frac{r}{d-r} \iff$

$\iff r = \frac{\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}}{1+\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}}\,d \iff r = 0{,}9d$ //

c) A capsula ficaria parada

Se for perturbada mex

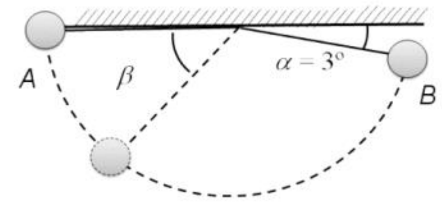
d) $\left.\begin{array}{l} E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - Gm\left(\frac{M_T}{R_T} + \frac{M_L}{d-R_T}\right) \\ E_f = -Gm\left(\frac{M_T}{0{,}9d} + \frac{M_L}{0{,}1d}\right)\end{array}\right\} E_i = E_f \iff v_0 = \sqrt{\frac{G\cancel{m}\left(\frac{M_T}{R_T} + \frac{M_L}{d-R_T}\right) - G\cancel{m}\left(\frac{M_T}{0{,}9d} + \frac{M_L}{0{,}1d}\right)}{\cancel{m}}\times2} \iff$

$\iff v_0 = 11052\,m/s$

e) $\begin{cases} E_0 = 0 \\ E_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_T m}{R_T}\end{cases} \iff$

$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \iff v_e = 11172\,m/s$

P 4.7 ("Introdução à Física", J. Dias de Deus et al., McGraw Hill, 2000)



Um pêndulo de massa 0,5 kg e de comprimento ℓ=1m é lançado com velocidade inicial nula de um ponto A indo atingir a amplitude máxima em B, correspondente a um ângulo α=3°, (ver figura.)

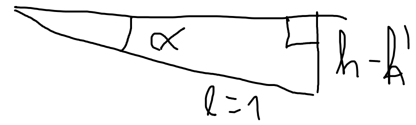
a) Calcule o trabalho realizado pela força de atrito quando o pêndulo vai de A para B.

b) Qual a força de atrito em média?

c) Qual o ângulo β que corresponde à amplitude máxima de oscilação seguinte, supondo, como aproximação, que a força de atrito é constante ao longo da trajectória. Note que α e β são ângulos pequenos, pelo que sin $\alpha\cong\alpha$ e sin $\beta\cong\beta$.

a) $m = 0{,}5\,Kg$

$l = 1\,m$



$\sin(3^\circ) = h - h'$

$E_i = mgh$

$E_f = mgh'$ $\quad W = E_f - E_i = mg(h-h') = -0{,}5\times9{,}8\times\sin(3) =$

$= -0{,}256\,J$

b) $W = F\times d$

$P = 2\pi R = 2\pi$

$-0{,}256 = F\times\frac{59}{60}\pi \iff$

$2\pi \;\times\; 360$

$x \quad\; 177$

$\downarrow$

$\frac{59}{60}\pi$

$F = -0{,}0829\,N$

c) $W = E_f - E_i \iff$

$F\times d = mg(\sin(\beta) - \sin(3)) \iff$

$2\pi \;\times\; 360$

$d \quad\; 177-\beta$

$\iff F\times\left(\frac{59\pi}{60} - x\right) = mg(x - \sin(3)) \iff$

$d = \frac{2\pi(177-\beta)}{360}$

$\iff \frac{F\,59\pi}{60} + mg\sin(3) = (mg+F)x \iff$

$x = 0{,}10286\,rad = 5{,}9^\circ$