P 5.1.

Um automóvel com uma massa total de 1000kg (incluindo ocupantes) desloca-se com uma velocidade (módulo) de 90km/h.

a) Suponha que o carro sofre uma travagem que reduz a sua velocidade até 40km/h no momento em que embate frontalmente numa carrinha de massa M_2=2000kg inicialmente em repouso, arrastando a mesma após o choque frontal. Qual será a velocidade final (módulo) do conjunto (carro+carrinha) no momento imediatamente a seguir ao choque?

b) Se em vez da carrinha o automóvel colidir a 40km/h com numa parede de betão (imóvel!) e o embate demorar 0,1s (tempo entre o momento em que o carro atinge a parede e a imobilização total) qual será a força que o cinto de segurança suporta para suster uma criança com uma massa de 40kg (apresente o resultado em N e em kgf)? (sugestão: utilize a 2ª lei de Newton supondo uma aceleração média constante durante o tempo de travagem para calcular a variação da quantidade de movimento do passageiro).

c) Sabendo que o tempo de reacção (que demora entre a visualização de um obstáculo e a actuação do travão) é de cerca 1 s e que a força de atrito após uma travagem de emergência (rodas bloqueadas) é dada por $F=-0{,}5|P|e_v$ (P – peso do automóvel, e_v – versor com a direcção e sentido da velocidade), estime a distância mínima de segurança que deverá ser mantida relativamente ao carro da frente numa fila em que os veículos se desloquem a 90km/h.

a)

$m = 1000\,kg$

$V = 90\,km/h = \dfrac{90 \times 10\cancel{0}}{36\cancel{0}} = 25\ m/s$

$V_i = 40\,km/h = \dfrac{40 \times 10}{36}$

$P_i = P_f \Leftrightarrow M_1 \cdot v_i = (M_1 + M_2) \cdot V_f \Leftrightarrow V_f = \dfrac{1000 \cdot \frac{40 \times 10}{36}}{3000} \Leftrightarrow V_f = 3{,}7\,m/s$

b) $F = \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$

$F = \dfrac{0 - \frac{40 \times 10}{36} \times 40}{0{,}1} = 4444{,}444\,N$

$\dfrac{4444{,}444}{9{,}8} = 435{,}5\ kgf$

c) $V_i = 25\ m/s$

$25\,m/s \times 1 = 25\,m$ (d rea)

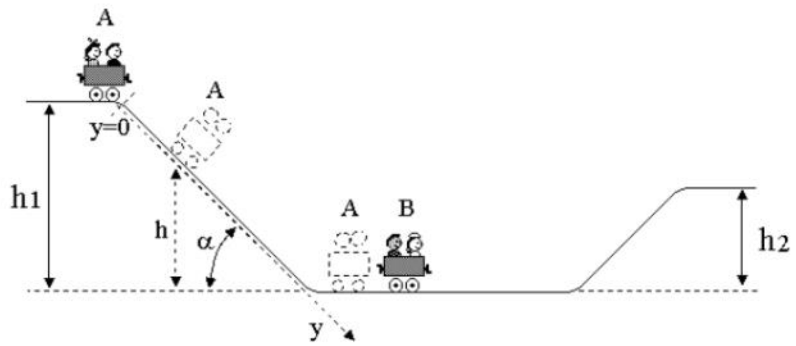
$\dfrac{1}{2} m V_0^2 = W_{F_a} \Leftrightarrow \cancel{\dfrac{1}{2}} \cancel{m} V_0^2 = \cancel{0{,}5} \cdot g \cdot \cancel{m} \cdot d \Leftrightarrow d = \dfrac{v^2}{g} = 63{,}78\,m$ (d trav)

$25 + 63{,}78 = 88{,}78\,m$

P 5.2.

Considere a montanha-russa representada na figura. Admita que o atrito é desprezável e que o movimento dos carrinhos pode ser descrito considerando-os como pontos materiais de massa M (conjunto carrinho+ocupantes) deslocando-se ao longo do eixo central dos carris. Dados: h1=10m, α=45°, M=300kg.

a) Escreva a função de Lagrange correspondente ao movimento do carrinho A, no troço descendente. Considere, para o efeito, a coordenada y cujo eixo está representado na figura.



b) A partir da função determinada na alínea anterior, deduza a equação do movimento respectiva utilizando a equação de Euler-Lagrange correspondente.

c) Admitindo que o carrinho A parte do repouso no topo da rampa inicial, qual a velocidade que atinge no fim desta rampa. Ao deslocar-se ao longo de troço horizontal, o carrinho A colide com o carrinho B (mesma massa de A) ficando ligado a este e passando os dois carrinhos a deslocar-se conjuntamente. Calcule a velocidade do conjunto após o choque. Qual a altura máxima h2 que a segunda rampa pode ter de modo a que o conjunto dos dois carrinhos atinja o topo?

$\mathcal{L} = T - U$

a) $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}^2 - mg\,(h_1 - y\sin(\alpha))$

b) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$mg\sin(\alpha) - \dfrac{d}{dt}\left(m\dot{y}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{m}g\sin(\alpha) - \cancel{m}\ddot{y} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ddot{y} = g\sin(\alpha)$

c) $\dfrac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 = \cancel{m}gh_1 \Leftrightarrow V = \sqrt{2gh_1}$

$\Leftrightarrow V = 14\,m/s$

$P_A = P_{A+B}$

$14 \times M_A = V_{A+B} \times (M_A + M_B) \Leftrightarrow V_{A+B} = 7\,m/s$

$T_{A+B} = U_{gh_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} m \cdot V_{A+B}^2 = m \cdot g \cdot h_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2} V_{A+B}^2}{g} = h_2 \Leftrightarrow h_2 = 2{,}5\,m$

P 5.3.

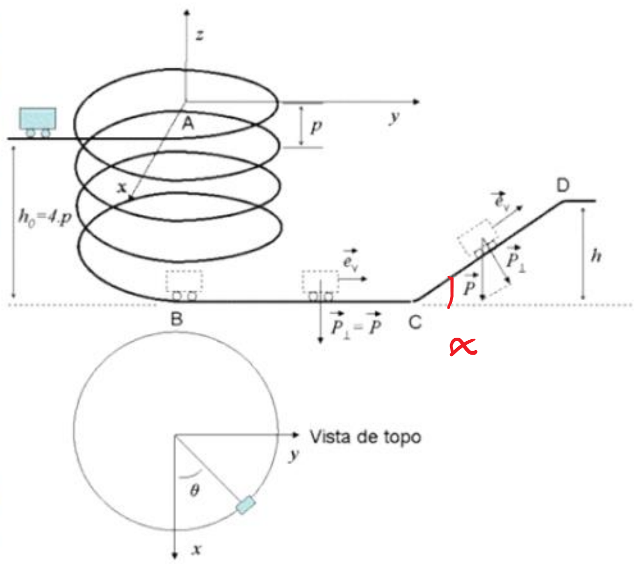
Na figura está representado um troço de montanha russa que inclui uma linha em forma de hélice com quatro "voltas" (AB), um troço plano (BC), e uma rampa (CD).

a) Se um carrinho, inicialmente em repouso no ponto A, descer o troço AB sujeito apenas ao seu próprio peso qual é a velocidade máxima que poderá atingir ao chegar ao ponto B? (De acordo com a figura, por cada volta, a coordenada z tem um decréscimo igual ao passo da hélice *p*.

b) Admita que o carrinho atinge o ponto B com a velocidade determinada na alínea a) (se não resolveu essa alínea considere esse velocidade v_B=20ms^{-1}), e que este se encontra sujeito nos troços BC e CD a uma força de atrito dada por $\vec{F}_a = -K|\vec{P}_\perp|\vec{e}_v$ em que $\vec{P}_\perp$ é a componente do peso perpendicular à trajectória e $\vec{e}_v$ é um versor com a direcção do vector velocidade. Calcule o valor da velocidade do carrinho ao atingir o topo da rampa (ponto D).

Massa total do carrinho: *m*=300kg; *K*=0,025; *h*=6m; *p*=4m; $\overline{BC} = 40m$; $\overline{CD} = 46m$

c) A curva correspondente ao troço AB na figura (hélice) pode ser parametrizada em função do ângulo θ definido na figura pelas equações: (note que θ varia entre 0 e 2π na primeira volta da hélice, entre 2π e 4π na segunda volta, etc.).



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = -\dfrac{p}{2\pi}\theta \end{cases}$$

Mostre que o módulo da velocidade de um móvel que se desloque seguindo a trajectória descrita pelas equações anteriores é dado por:

$$v = \dot\theta\sqrt{r^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$$

d) Escreva o Lagrangeano do sistema constituído pelo carrinho de massa *m* que se desloca ao longo do troço AB sujeito apenas ao seu próprio peso (atrito desprezável) em função da variável generalizada θ.

e) Determine a equação do movimento do sistema descrito pelo Lagrangeano determinado na alínea anterior.

a) $\frac{1}{2} m v^2 = mgh \Leftrightarrow v = \sqrt{2\cdot 9,8\cdot 4\cdot 4} = 17,7$

b)

$\vec{F}_a = -k|\vec{P}_\perp|\vec{e}_v$

Em BC

$E_f = E_i - W_{F_a}$

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_i^2 - k\cdot\cancel{m}\cdot g\cdot d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_f = \sqrt{2(\frac{1}{2}v_i^2 - kg\cdot d)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v_f = 17.1$ m/s

Em CD

$\sin(\alpha) = \frac{6}{46}$

$\cos(\alpha) = \sqrt{1-(\frac{6}{46})^2}$

$P\cdot\cos(\alpha) = P_\perp$

$E_f = E_i - W_{F_a} \Leftrightarrow T_f + U = T_i - W_{F_a} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_f^2 + m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_i^2 - Kgd\cos(\alpha) \Leftrightarrow$

$v_f = \sqrt{2(\frac{1}{2}v_i^2 - Kgd\cos(\alpha) - gh)} \Leftrightarrow v_f = 12.34$ m/s //

c) $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \Leftrightarrow$

$v = \sqrt{r^2\dot\theta^2\sin(\theta)^2 + r^2\dot\theta^2\cos(\theta)^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\dot\theta^2}$

$v = \dot\theta\sqrt{r^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}$ //

d) $\mathcal{L} = T - U \Leftrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\cdot\dot\theta^2\cdot\left(r^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right) + mg\frac{p}{2\pi}\theta$

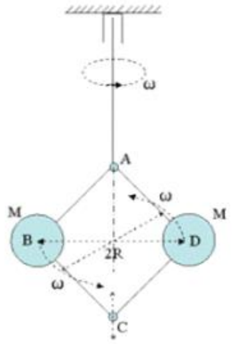
c) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow mg\frac{p}{2\pi} - \frac{d}{dt}\left(m\cdot\theta\cdot\left(r^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\ddot\theta = \frac{\cancel{m}g\frac{p}{2\pi}}{\cancel{m}\cdot\left(r^2+\frac{p^2}{4\pi^2}\right)} = g\cdot\frac{p}{2\pi\left(r^2+\frac{p^2}{4\pi^2}\right)} =$

$= g\cdot\frac{p}{2\pi r^2 + \frac{p^2}{2\pi}} = g\cdot\frac{2\pi p}{4\pi r^2 + p^2}$

P 5.4.



O sistema representado na figura é composto por duas esferas de massa M=1kg que rodam em torno de um eixo vertical AC. Os braços do sistema ABCD são articulados de forma que o movimento vertical do ponto C permite fazer variar a distância 2R entre as duas esferas.

a) Calcule o momento de inércia do sistema para uma distância entre as esferas 2R=2m, admitindo que a massa dos braços e do eixo é desprezável e que as esferas podem ser consideradas como pontos materiais cuja massa se concentra no respectivo centro.

b) Calcule o momento angular do sistema considerando que este efectua 300 rotações por minuto.

c) Encontrando-se o sistema a rodar conforme se descreve na alínea anterior, o ponto C é deslocado para baixo de forma que a distância entre as esferas passe a ser 2R=1m. Calcule o novo valor da velocidade angular após esta operação.

a)

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = 1+1$$

$T = 300$ RPM

$f = 5$ Hz

$\omega = 2\pi 5 = 10\pi$

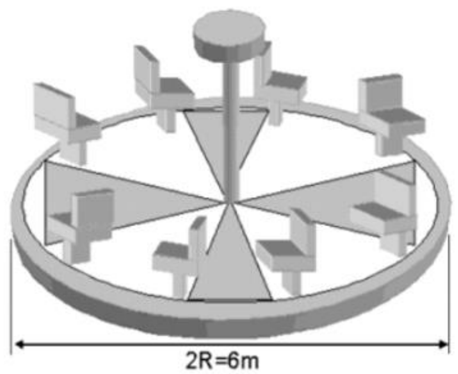
b) $L = I \cdot \omega = 2 \cdot 10\pi = 20\pi$ kg m²/s

c) $L = 20\pi$

$$I = 2 \times (0{,}5)^2$$

$$\frac{20\pi}{2\times(0{,}5)^2} = \omega \iff 40\pi = \omega$$ //

P 5.5.



Considere o carrossel representado na figura. A massa da base de raio R_2=3m é M=200Kg. A massa de cada uma das cadeiras é de 22kg.

a) Determine um valor aproximado do momento de inércia do carrossel considerando que em cada uma das cadeiras está sentada uma criança com uma massa média de 40kg. Admita que o centro de massa de cada conjunto cadeira-criança se encontra a 2,5m do eixo de rotação do carrossel, despreze o momento de inércia do eixo do carrossel e considere a massa de cada conjunto cadeira-criança localizada no centro de massa respectivo. (Momento de Inércia de um cilindro homogéneo relativamente ao eixo de simetria cilíndrica: $I = \frac{1}{2}MR^2$)

b) Calcule o momento angular do carrossel se este efectuar 19,1 voltas por minuto (se não resolveu a alínea a) considere um momento de inércia total I=4000kg.m^2.

c) Para parar o carrossel, aplica-se uma força sobre o eixo, com um momento constante de 800Nm. Quanto tempo demora até o carrossel atingir o estado de repouso? Calcule a potência média associada à energia total dissipada na travagem do carrossel. (se não resolveu a alínea anterior considere um momento angular total inicial de 8000 kgm^{2}s^{-1}).

a) $I = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 3^2 + 8 \cdot 62 \cdot (2{,}5)^2 = 4000$ kg m²

b) $f = 19{,}1$ RPm $= \frac{19{,}1}{60}$ Hz $\omega = 2\pi f = \frac{\pi \cdot 19{,}1}{30}$

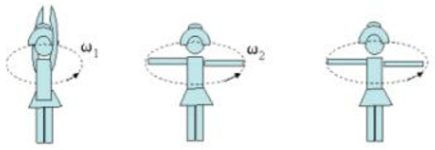
$$\vec{L} = 4000 \times \frac{\pi \cdot 19{,}1}{30} = 8000 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

c)

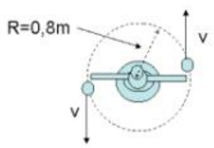
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = N \iff \Delta t = \frac{\Delta L}{N} = \frac{8\cancel{000}}{8\cancel{00}} = 10\text{ s}$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{800}{10} = 80\text{W}$$

P 5.6.



a) Uma patinadora rodopia inicialmente com uma velocidade angular de módulo $\omega_1=6\pi$ rad/s. E com os braços na vertical conforme se indica na figura. Admitindo que o momento de inércia da patinadora relativamente ao eixo de rotação da mesma tem o valor de 0,24 kg.m², calcule o respectivo momento angular num referencial cujo eixo dos zz coincida com o eixo de rotação da bailarina.



b) Se a patinadora baixar os braços para a posição horizontal passando o respectivo momento de inércia para o valor de 1,24 kg.m², qual passará a ser o valor da respectiva velocidade angular – calcule e justifique referindo o princípio utilizado (considere o referencial utilizado na alínea anterior).

c) Considere que a patinadora rodopia, nas condições definidas na alínea b) transportando em cada uma das mãos uma bola. Admita que a distância entre o eixo de rotação e o centro de cada uma das bolas é de 80cm. Se num dado momento a patinadora largar as duas bolas, qual será a velocidade inicial de cada uma delas? (represente os vectores velocidade num esquema).

d) Determine o momento de inércia da patinadora (relativo ao eixo dos zz definido anteriormente) após o lançamento das duas bolas considerando que estas têm uma massa de 0,250g cada uma (considere o momento de inércia inicial, antes do lançamento das bolas o valor dado na alínea b). Calcule o valor do momento angular total do sistema (bailarina mais bolas) num momento qualquer após o lançamento das bolas (despreze o atrito com o ar para o movimento das bolas). Comente.

a) $\omega = 6\pi$ Rad/s $\quad I = 0{,}24$ kg m²

$\vec{L} = I\cdot\omega = 1{,}44\pi$ Kg m²/s $= 4{,}524$ kg m²/s

b) $I = 1{,}24$ Kg m²

$1{,}44\pi = 1{,}24\cdot\omega \Leftrightarrow \omega = 3{,}6483$ Rad/s

(Conservação de $\vec{L}$)

c) $V = \omega R = 3{,}6483 \times 0{,}8 = 2{,}919$ m/s

d) $I_f = I_i - 2\times(0{,}250)\times 0{,}8 = 0{,}92$ kg m²

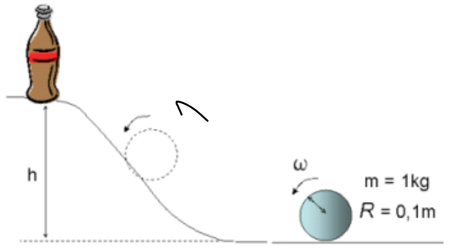
$\vec{L}_f = \vec{L}_i = 4{,}524$ kg m²/s

P 5.7.

Uma esfera de massa *m=1.*kg e raio *R* = 0,1 m rola sem escorregar ao longo de uma superfície para a qual podemos considerar desprezável a força de atrito. A esfera deverá rodar, subindo ao longo do plano inclinado representado na figura até atingir a garrafa colocada no fim da rampa a uma altura *h=1.m* do início da rampa.

a) Determine a expressão da energia cinética total associada ao movimento da esfera (translação mais rotação) em função da massa total, m, do momento de inércia, *I*, do respectivo raio e da velocidade angular associada ao movimento de rotação (sugestão: lembre-se que a distância percorrida pelo centro da esfera quando esta rola de um determinado ângulo θ é igual ao produto do raio respectivo pelo valor desse ângulo em radianos $x=R\theta$).

b) Calcule o valor mínimo da velocidade angular inicial da esfera para que esta possa atingir a garrafa colocada no topo da rampa. Nota: O momento de inércia associado à rotação de uma esfera de massa *m* e raio *R* em torno de qualquer eixo que passe pelo respectivo centro é dado por: $I=(2/5)mR^2$.



c) Qual seria o valor obtido se o objecto em rotação fosse um cilindro e não uma esfera (momento de inércia do cilindro para rotação em torno do eixo de simetria de rotação do mesmo $I=(1/2)mR^2$?

a) $m = 1$kg
$R = 0{,}1$ m
$h = 1$m

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(mR^2 + I)\omega^2$$

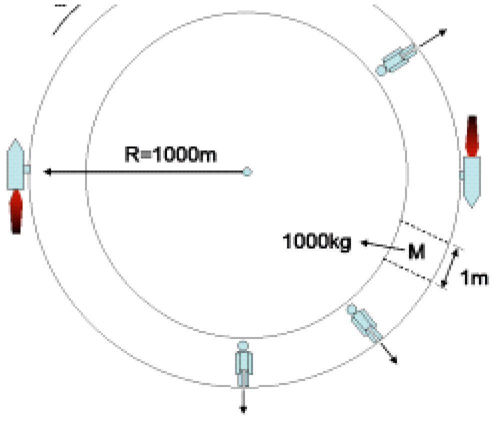
b)

$$\frac{1}{2}\left(mR^2 + \frac{2}{5}mR^2\right)\omega^2 = mgh \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}(mR^2 + \frac{2}{5}mR^2)}} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{10gh}{7}} \Leftrightarrow \omega = 37 \text{ Rad/s}$$

c)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2}(mR^2 + \frac{1}{2}mR^2)}} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4gh}{3}} \Leftrightarrow \omega = 36 \text{ Rad/s}$$

P 5.8.



O elemento principal da estação espacial representada na figura tem a forma de um anel de 1000 m de raio. Considere como aproximação que a espessura do anel é desprezável em relação ao raio respectivo. O anel tem uma massa por unidade de comprimento μ=1000kg/m. A estação espacial roda em torno de um eixo de simetria perpendicular ao plano do anel de forma que os astronautas, ao deslocarem-se ao longo do perímetro da estação (ver figura) sintam uma força radial que funciona como "gravidade artificial".

a) Qual a velocidade angular ω que deverá ter o movimento de rotação da estação para que os astronautas sintam um "peso" semelhante ao que possuem na Terra? (Considere $g \equiv 10\text{ms}^{-2}$) Qual é o período de rotação da estação espacial nessas circunstâncias?

b) Calcule o momento de inércia da estação espacial relativamente ao eixo de simetria anteriormente referido (despreze todas as massas que não a do anel: foguetes, astronautas, etc...).

c) Calcule o módulo do momento angular e a energia cinética de rotação da estação espacial, nas condições determinadas na alínea a). (Se não resolveu a alínea a) considere ω = 0.1 rad.s^{-1}).

d) Considere que a estação espacial adquire o movimento de rotação mediante a utilização de dois foguetes conforme se indica na figura. Cada um dos foguetes expele gás a uma velocidade $u = 10^4$ m.s^{-1} na direcção e sentido(s) indicados na figura e a uma taxa constante de 100.π.kg/s. Calcule o binário resultante do efeito conjunto dos dois foguetes. (Sugestão: Lembre-se da segunda lei de Newton - $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ - e comece por calcular, para cada foguete, a variação da quantidade de movimento associada à expulsão do gás a <u>velocidade constante</u> que implica uma variação de massa $\frac{dm}{dt}$ correspondente ao valor indicado (100 π.kg/s).

e) Quanto tempo leva o foguete, partindo da situação inicial (ω = 0 rad.s^{-1}) a atingir a situação final definida na alínea a). (Se não resolveu as alíneas anteriores considere o módulo de momento angular final da nave $L = 2\pi\times10^{11}$ kg.m^{2}s^{-1} e um binário de aceleração constante, de módulo $N = 2\pi\times10^9$Nm). Considere como aproximação que a massa associada ao gás expulso durante o período de aceleração é desprezável face a massa total da estação espacial.

f) Verifique a razoabilidade da aproximação considerada na alínea anterior (se não resolveu essa alínea considere um tempo de aceleração de 100s).

a) $R = 1000\ m$

$\mu = 1000\ kg/m$

a) $\omega = ?$

$g = 10\ m/s^2$

$F_c = m a_N \Leftrightarrow mg = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow gR = v^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0{,}1\ rad/s$

b) $I = \int R^2 \mu\, dl = \int R^2 \mu R\, d\theta = 2\pi\mu R^3 = 2\pi\times10^{12}\ kg\, m^2$

c) $L = I\cdot\omega = 2\pi\times10^{12}\times0{,}1 = 2\pi\times10^{11}\ kg\, m^2/s$

d) $2(R\times F) = 2\left(R\times\frac{\Delta m}{\Delta t}\times u\right) = 2\times1000\times10^4\times100\times\pi = 2\pi\times10^9\ Nm$

e) $N = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{L}{N} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\cancel{2\pi}\times10^{11}}{\cancel{2\pi}\times10^9} = 1000$

f) $m = 100\pi\times100 = 10^4\pi$

É uma percentagem baixa de peso

$\frac{10^4\pi}{2\pi\times1000\times1000}\times100 = 0{,}5\ \%$ //

P 5.9.

a) Mostre que a velocidade angular ω para o movimento orbital de um satélite em torno da Terra é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

em que G é a constante de gravitação universal: G = 6,67x10^{-11}Nm^{2}kg^{-2}, M é a massa da Terra e R é o raio da órbita (admita que a órbita do satélite é aproximadamente circular e que a massa deste é muito menor que a massa da Terra).

b) Calcule a duração aproximada de um ciclo do movimento de translação da Lua em torno da Terra sabendo que a distância média da Terra à Lua é de R=3,84x10^8 m, e que a massa da Terra é M=5,98x10^{24}kg.

a) $F_c = m\times a_N \Leftrightarrow \frac{GM\cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \frac{GM}{R} = \omega^2R^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$

b) $\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{R^3} \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM}} = 2367353\ s = 27{,}4\ dias$