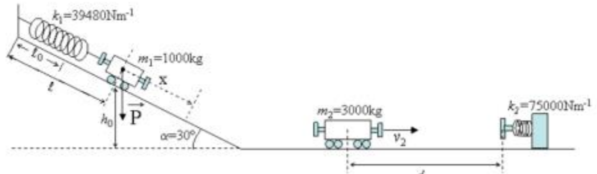
P 7.1

Considere que as vagonetas de massa m_1 e m_2 (ver figura) podem ser representadas por dois pontos materiais localizados nos centros de massa respectivos, para efeito da descrição do seu movimento. Admita que o atrito é desprezável.



a) Sendo ℓ_0=1m o comprimento natural (comprimento na ausência de esforço aplicado) da mola de constante elástica k_1=39480 Nm^{-1}, determine o comprimento ℓ correspondente à posição de equilíbrio da vagoneta de massa m_1 = 1000 kg suspensa pela mola sobre o plano inclinado (α=30º).

b) Escreva uma expressão para a energia potencial do sistema formado pela vagoneta suspensa pela mola sobre o plano inclinado em função da distância x à posição de equilíbrio (determinada na alínea a)) medida ao longo do plano inclinado (ver figura 1).

c) Escreva a função de Lagrange do sistema definida na alínea b) (para a variável x – ver figura 1) e determine a respectiva equação do movimento partindo da equação de Lagrange.

d) Admita que a vagoneta sofre um deslocamento inicial de 0,32 m relativamente à sua posição de equilíbrio sendo em seguida libertada permanecendo ligada à mola. Determine o número de oscilações por segundo e a velocidade máxima (módulo) que a vagoneta atinge nessas condições.

a)

$F_g = F_{el} \Leftrightarrow$ $\quad \Delta x = l_{eq} - l_0$

$m \times g \times \sin(\alpha) = -k\,\Delta x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1000 \times 9{,}8 \times \sin(30)}{39480} = -(l_{eq} - 1)$

$\Leftrightarrow l_{eq} = 1{,}124$

b) $U = U_g + U_{el} = -mgh + \frac{1}{2}k(\overbrace{l_{eq} - l_0}^{0} + x)^2$

$= -mg\sin(\alpha)x + \frac{1}{2}kx^2 = k(\underbrace{l_{eq} - l_0}_{0})x + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx^2$

c) $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow -kx - \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} = -kx$

d)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 6{,}28$ rad/s

$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \cdot x \Leftrightarrow v = 6{,}28 \cdot 0{,}32 = 2$ m/s

P 7.2.

Admita as condições gerais do problema anterior (atrito desprezável e vagonetas representadas por pontos materiais). Suponha que a vagoneta de massa m_1 se encontra em repouso no ponto de equilíbrio (energia elástica nula) e é desligada da mola a partir dessa posição (h=h_0).

a) Calcule a velocidade com que vagoneta atinge o plano horizontal se partir de uma altura h_0=10m (sugestão utilize o princípio da conservação da energia).

b) Se a vagoneta de massa m_1=1000kg chocar com uma outra de massa m_2=3000kg (inicialmente em repouso) qual será a velocidade final (após o choque) da vagoneta que se encontrava em repouso (admita tratar-se de um choque elástico) (se não resolveu a alínea anterior considere para a velocidade antes do choque v_1=14ms^{-1}).

c) Após o choque, a vagoneta de massa m_2 começa a travar indo parar numa barreira equipada com um batente com uma constante elástica k_2=75000Nm^{-1}. Sabendo que o comprimento da mola do batente se reduziu de 0,2m até a vagoneta se encontrar momentaneamente em repouso, calcule a velocidade residual com que a vagoneta chegou à barreira. Se a distância de travagem d_t for de 40m e admitindo que a força de atrito associada à travagem é constante determine o módulo dessa força (se não resolveu a alínea anterior, considere que, imediatamente após o choque entre as vagonetas, a vagoneta de massa m_2 tem uma velocidade de módulo v_2=7ms^{-1}).

a) $\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh} = 14$ m/s

b) $P_1 = P_2 \Leftrightarrow 1000 \times 14 = 1000 \times v_1' + 3000 \times v_2' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14 = v_1' + 3v_2'$

$E_c = E_c' \Leftrightarrow \frac{1}{2}1000 \times 14^2 = \frac{1}{2} \times 1000\,v_1'^2 + \frac{1}{2} \times 3000\,v_2'^2$

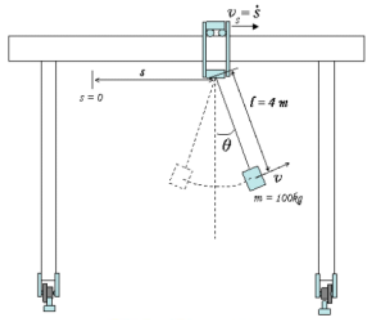
$\begin{cases} 14 = v_1' + 3v_2' \\ 98 = \frac{1}{2}v_1'^2 + \frac{3}{2}v_2'^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -7 \text{ m/s} \\ v_2' = 7 \text{ m/s} \end{cases}$

c) $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} \Leftrightarrow v = 1$ m/s

$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2 = |\vec{F}|d \Leftrightarrow \frac{72000}{40} = |\vec{F}| \Leftrightarrow 1800 = |\vec{F}|$

P 7.3

Pretende-se descrever o movimento da massa m, composto pelo deslocamento horizontal do suporte (representado pela variável s) e pela respectiva oscilação pendular (definida pelo ângulo θ).



a) Admitindo que o suporte desliza livremente, sem atrito, sobre a trave do pórtico, escreva as expressões da energia cinética e da energia potencial, associadas ao movimento da massa m em função das variáveis s e θ e das respectivas derivadas em ordem ao tempo, $\dot{s}$ e $\dot{\theta}$. Escreva a função de Lagrange correspondente.

b) Considere o caso particular em que em que o suporte se encontra em repouso (s=s_0=constante e $\dot{s}$=0). Partindo da simplificação do Lagrangeano determinado na alínea anterior, para este caso particular, deduza a equação de Euler-Lagrange que descreve o movimento da massa m em função da variável θ (*)

a) $U = -mgl\cos(\theta)$

$x = l\sin(\theta) + s$

$y = -l\cos(\theta)$

$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{s}$

$\dot{y} = l\dot{\theta}\sin(\theta)$

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^{\,2} =$

$= \frac{1}{2}m\left((l\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{s})^2 + (l\dot{\theta}\sin(\theta))^2\right) =$

$= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\cos(\theta)\dot{s} + \dot{s}^2)$

$L = T - U = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\cos(\theta)\dot{s} + \dot{s}^2) - mgl\cos(\theta)$

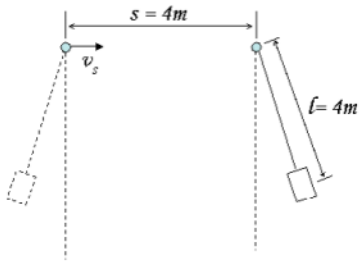
b) $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos(\theta)$

$\dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow -mgl\sin(\theta) - \dfrac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = 0$

$\Leftrightarrow -\cancel{m}g\cancel{l}\sin(\theta) - \cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta}l + g\sin(\theta) = 0$

P 7.4

A equação do movimento determinada na alínea b) do problema anterior pode ser aproximada, para pequenas oscilações por: $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$, em que ω_0 é, neste caso, a frequência angular própria de oscilação de um pêndulo. Pode demonstrar-se que esta equação permanece válida no caso em que a velocidade v_s é constante, ou seja, nesse caso o movimento de oscilação é independente do movimento de translação do suporte.



a) Se se pretender evitar que a frequência de oscilação da carga m seja superior a 1 Hz, será que esta carga pode ser movimentada conforme se indica nas figuras? Justifique.

b) Se o suporte se deslocar ao longo da trave a uma velocidade constante, qual deverá ser o módulo dessa velocidade (v_s) para que a carga oscile entre as duas posições extremas (representadas na figura) sem inverter o sentido do movimento, enquanto o suporte se desloca horizontalmente de uma distância de 4 m.

a) $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 0{,}25 < 1$ P V,

b) $\Delta t = \dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{2f} = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ $\quad v = \dfrac{4}{\Delta t} = 2$ m/s

P 7.5.

Suponha que o cabo que sustenta a massa m = 100 kg (ver figura do problema 7.3) relativa aos problemas anteriores tem uma densidade linear μ = 392 g/m. Admita que o cabo se encontra na posição vertical (sem oscilação pendular).

a) Determine a velocidade de propagação de uma vibração transversal ao longo deste cabo.

b) Considerando que o limiar inferior de audição humana se situa numa frequência de 20Hz, para que valores do comprimento ℓ é possível ouvir as vibrações do cabo de sustentação no modo fundamental?

$m = 100$ kg

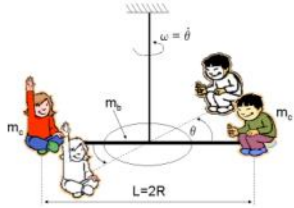
$\mu = 392$ g/m $\quad v = \sqrt{\dfrac{100 \times 9{,}8}{392 \times 10^{-3}}} = 50$ m/s

a)

b) $2l = \dfrac{v}{f} \Leftrightarrow l = \dfrac{v}{2f} = 1{,}25$ m

P 7.6.

Um baloiço rotativo, é formado por uma barra suspensa na respectiva posição central por um cabo que funciona como uma mola de torção de constante α = 440 J.rad^{-1}. A massa da barra suspensa é de m_b=20kg e o respectivo comprimento é de L=3m (1,5m de cada lado do cabo de suspensão). Em cada um dos lados do baloiço está sentada uma criança cuja massa (conjuntamente com o banco em que está sentada) é m_c=40kg.



a) Calcule o momento de inércia do sistema formado pelo baloiço mais as crianças relativamente ao eixo de rotação definido pelo cabo de suspensão do baloiço, sabendo que o momento de inércia da barra é dado por I_b = (1/12)m_b.L^2 e considerando as crianças como massas pontuais situadas a uma distância L/2 do eixo.

b) Considerando que a energia potencial elástica do sistema (relativa ao binário de restituição resultante da torção do cabo) é dada por U=1/2.α.θ^2, escreva a função de Lagrange do sistema para a variável generalizada θ que representa o afastamento angular do baloiço relativamente à posição de equilibrio (em termos dos parâmetros ? e I - momento de inércia).

c) A partir da função determinada na alínea b) determine a equação do movimento do sistema.

d) Calcule a frequência angular própria de oscilação do sistema, ω_0.

$\alpha = 440$ J/rad

$m = 20$ kg

$L = 3$ m

$m_c = 40$ kg

a) $I = \frac{1}{12} \cdot m_B \cdot L^2 + 2m_c \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 15 + 180 = 195$ kg m^2

b) $U = \frac{1}{2}\alpha\theta^2$

$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

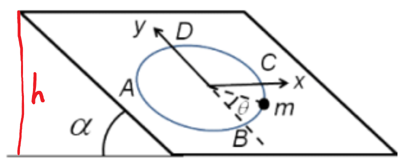
$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\alpha\theta^2$

c) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{I}\theta = 0$

d) ${\omega_0}^2 = \dfrac{\alpha}{I} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{440}{195}} = 1{,}50$ rad/s

P 7.7. ("Exercícios de Física", A. Noronha, P. Brogueira, McGraw Hill, 1994)

Uma calha circular é disposta inclinada como se mostra na figura, sendo $\alpha = 30°$ e $R = 20$ m. Uma esfera de massa $m = 50$ kg é colocada na calha e o seu movimento faz-se praticamente sem atrito. A sua velocidade para $\theta = 90°$ é 36 km/h (considere a esfera como uma massa pontual).



a) Escreva e expressão da energia potencial da esfera em função da sua posição θ.
b) Escreva a função de Lagrange da esfera nas condições indicadas na figura.
c) Escreva a equação do movimento da esfera.
d) Calcule a velocidade da esfera em função da sua posição θ. Em que ponto da calha a esfera atinge a sua maior velocidade? Explique por que razão essa função essa função é independente da massa da esfera.
e) A esfera consegue dar a volta à pista toda?

a) $U = -mgh\cos(\theta)R = -mg\sin(\alpha)\cos(\theta)R$

b) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mg\sin(\alpha)\cos(\theta)R$

c) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow -mg\sin(\alpha)\sin(\theta)R - m\ddot{\theta}R^2 = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g\sin(\alpha)\sin(\theta)}{R}$

d) $E = T + U \Leftrightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mg\sin(\alpha)\cos(\theta)R = C$

$|\dot{\theta}| = \sqrt{2C + 2g\frac{\sin(\alpha)\cos(\theta)}{R}}$

com $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 0 + n\pi \Rightarrow$ maior 1g quando o máximo

e) $U_{Tcalha} = mg2R\sin(\alpha) = 5000$ J

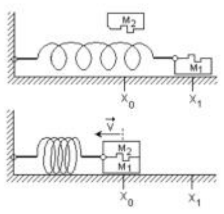
$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times \left(\frac{36000}{3600}\right)^2 = 2000$ J

Não dá a volta

P 7.8

Considere o sistema massa-mola representado na figura.

A mola tem uma constante elástica K, e um comprimento em repouso x_0. Inicialmente, a mola encontra-se ligada a uma massa M_1 que é deslocada da posição x_0 para x_1 e libertada.



a) Admitindo que o atrito é desprezável, mostre que o módulo da velocidade da massa M_1 ao passar no ponto x_0 é dado por:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{M_1}}|x_1 - x_0|$$

(sugestão: utilize o princípio da conservação da energia).

$T = U_{el} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(x_1 - x_0)^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}|x_1 - x_0|$

b) Ao passar no ponto x_0 (correspondente ao comprimento natural da mola) é instantâneamente colocada uma massa M_2 (inicialmente em repouso) sobre a massa M_1, passando o conjunto das duas massas a deslocar-se solidáriamente. Mostre que o módulo da velocidade do conjunto no instante imediatamente seguinte à colocação da massa M_2 é dado por:

$$v_1 = \frac{1}{1 + \frac{M_2}{M_1}}\sqrt{\frac{K}{M_1}}|x_1 - x_0|$$

$P_1 = P_{2+1} \Leftrightarrow v \cdot m = v' \cdot (m + M_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v' = \frac{m}{m + M_2} \cdot v \Leftrightarrow v' = \frac{1}{1 + \frac{M_2}{m}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}|x_1 - x_0|$

Mostre que o novo valor da amplitude das oscilações ($|x_2 - x_0|$) é dado por:

$$|x_2 - x_0| = \sqrt{\frac{M_1}{M_1 + M_2}}|x_1 - x_0|$$

$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \Leftrightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m}{m + M}}|x_1 - x_0| \Leftrightarrow$

$|x_2 - x_0| = \sqrt{\frac{m}{m + M}}|x_1 - x_0|$ //

c) Explique como poderia utilizar o sistema descrito neste problema como uma balança, partindo do conhecimento do valor da massa M_1 (massa de referência) e medindo a frequência das oscilações livres antes e depois da colocação da massa M_2. Mostre que se verifica a relação:

$$M_2 = M_1\left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1\right]$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega = 2\pi f$

$(2\pi f)^2 m = k$

$(\cancel{2\pi} f_2)^2(M + m) = (\cancel{2\pi} f_1)^2 m$

$M + m = m\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \Leftrightarrow M = m\left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1\right)$ //

Este útil instrumento, representado na figura, permite-lhe pesar os produtos colocados no prato da balança através do som produzido pela corda vibrante de comprimento L cuja tensão, T, é determinada precisamente pelo peso do conjunto produtos+prato da balança.

a) Considerando que a corda vibrante utilizada pelo Sr. Silva tem uma densidade linear μ=3g.m^{-1} e que o prato da balança tem uma massa total de 0,5kg, qual será a velocidade de propagação das vibrações na corda se a massa do produto a pesar for de 1kg.

b) Qual deverá ser o comprimento L da corda (determinado pela posição da roldana) para que a corda vibre no seu modo fundamental com uma frequência associada à nota DÓ (f=128Hz) quando estivermos nas condições da alínea anterior (massa do produto a pesar = 1kg).

c) Qual o comprimento de onda do som que se propaga no ar nas condições definidas na alínea anterior.

a) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = 70$ m/s

b) $v = \lambda f$

$\lambda = 2L$

$\Leftrightarrow 70 = 2L\,128 \Leftrightarrow \frac{70}{2 \cdot 128} = L \Leftrightarrow 0{,}27$ m $= L$

c) $v = 340$ m/s

$f = 128$ Hz

$\frac{340}{128} = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2{,}656$ m //