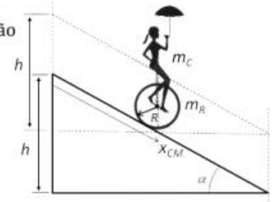
Mestrado Integrado em Engenharia Biomédica
Licenciatura em Engenharia Geológica e de Minas
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Duração do teste: 1:30h
Duração do exame: 2:30h
Leia o enunciado com atenção. Justifique todas as respostas.
Identifique e numere todas as folhas da prova.



Problema 1

Uma ciclista desce uma rampa de inclinação α num monociclo (ver figura). A roda do monociclo tem uma massa m_R um raio R e um momento de inércia I. O conjunto da ciclista e das peças fixas do monociclo (tudo menos a roda) tem uma massa m_c.

a) (Exame; 2,0 valores) Desprezando o efeito do atrito, determine as expressões da energia cinética e da energia potencial em função da coordenada x_{CM} indicada na figura (que representa a posição do centro de massa ao longo da rampa) e dos parâmetros dados. (Sugestão: repare que quando a roda roda de um ângulo θ, o centro de massa do sistema desloca-se de uma distância $x_{CM} = R\theta$ ao longo da rampa).

b) (Exame; 1,5 valores) Escreva a função de Lagrange que descreve o movimento do centro de massa do sistema em função da coordenada x_{CM} e dos parâmetros referidos na alínea anterior. Determine a equação diferencial do movimento do sistema em função desses parâmetros.

c) (Exame; 1,5 valores) A roda do monociclo tem uma massa $m_R = 10$ kg, um raio $R = 0{,}4$ m e um momento de inércia $I = 1{,}4\ \text{kg m}^2$. O conjunto da ciclista e das peças fixas do monociclo (tudo menos a roda) tem uma massa $m_c = 50$ kg. Qual a velocidade da ciclista (centro de massa) ao atingir a base da rampa, se partir do repouso do topo da rampa situado a uma altura $h = 4\ m$?

a) $x_c = R\theta$ $\qquad T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{CM})^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m_c + m_R\right)\dot{x}_{CM}^2$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad U = (m_c + m_R)\, g\, (h - x_{CM} \sin(\alpha))$

b) $\mathcal{L} = T - U$ $\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \iff (m_c + m_R)\, g \sin(\alpha) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{I}{R^2} + m_c + m_R\right)\dot{x}\right) = 0$

$$\frac{(m_c + m_R)\, g \sin(\alpha)}{\frac{I}{R^2} + m_c + m_R} = \ddot{x}$$

c)

$E_f = E_i$

$E_i = T_i + U_i = U_i = (10 + 50)\, 9{,}8\, (4 - 0) = 60 \times 4 \times 9{,}8 = 2352\ J$

$E_f = T_f + U_f = T_f = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m_c + m_R\right) v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}4}{0{,}4^2} + 50 + 10\right) v^2$

$$v^2 = \frac{2352}{\frac{1}{2}\left(\frac{1{,}4}{0{,}4^2} + 60\right)} \iff v = 8{,}27\ m/s$$

Problema 2

a) (Exame; 1,5 valores) Mostre que a energia mecânica total E (cinética + potencial gravítica) de um satélite de massa m numa órbita circular em torno da Terra é dada por:

$$E = -G\frac{M_T m}{2r}$$

em que $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2}$ é a constante de gravitação universal, $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg é a massa da Terra e r é a distância do satélite ao centro do Terra.

b) (Exame; 1,5 valores) Um satélite de massa $m = 100$ kg é colocado por um foguetão a uma altitude $h = r_1 - R_T = 300$ km. Seguidamente um foguete auxiliar, colocado no próprio satélite, desloca-o até uma órbita situada a uma distância do centro da Terra: $r_2 = 4{,}2 \times 10^7$ m. Determine a energia consumida pelo foguete auxiliar neste transporte. (Raio média da Terra $R_T = 6{,}371 \times 10^6$m)

a) $E = T + U$ $\qquad a_N = -\frac{v^2}{R}$ $\qquad v^2 = \frac{GM}{R}$

$T = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad a_N = -\frac{GM}{r^2}$

$U = -G\frac{Mm}{R}$

$$\frac{1}{2}\frac{mGM}{R} - \frac{GMm}{R} = -G\frac{Mm}{2R}$$

b) $m = 100\ kg$ $\qquad E_f - E_i = 2{,}51471 \times 10^9\ J$

$h = r_1 - R_T = 300\ km$

$r_2 = 4{,}2 \times 10^7\ m$

Problema 4

Um sensor utilizado num sistema de controlo de tráfego ferroviário tem um princípio de funcionamento baseado no efeito Doppler.

a) (Exame; 1,5 valores) Se uma locomotiva que se aproxima do sensor imóvel, com uma velocidade de módulo v_c, emitir um som com um comprimento de onda λ (determinado por um observador em repouso em relação à locomotiva), qual o comprimento de onda, λ', do som detetado pelo sensor fixo ao solo? (determine a expressão de λ' em função de λ, v_c, e da velocidade do som no ar, v_{som}).

b) (Exame; 1,5 valores) O sistema de controlo de tráfego é utilizado para prever a chegada dos comboios às estações através de um sinal transmitido do sensor para a estação seguinte. As locomotivas de cada composição emitem um som de referência ("apito") com uma frequência $f = 1$ kHz (no referencial do comboio). Sabendo que o sensor fixo ao solo detetou um sinal sonoro com uma frequência $f' = 1100$ Hz quando uma determinada composição se aproximava deste a velocidade constante, estime quanto tempo levará esse comboio a chegar a uma estação situada a 10 km do sensor (considere a velocidade do som $v_s = 340\ \text{ms}^{-1}$).

c) (Exame; 1,5 valores) Suponha que o "apito" do comboio é originado por uma coluna de ar que vibra devido a uma onda estacionária no modo fundamental ("nodos" de pressão nos extremos do tubo). i) Determine o comprimento da coluna de ar utilizando os dados da alínea anterior; ii) Qual a frequência do som emitido se o ar no interior do apito for substituído por hélio (velocidade do som no Hélio: $v_{He} = 1007\ \text{ms}^{-1}$).

a) $\lambda' = \lambda - v_c T$ $\qquad \lambda = v_s T \iff T = \frac{\lambda}{v_s}$

$\lambda' = \lambda - \frac{v_c}{v_s}\lambda$

b) $\frac{v_s}{f'} = \frac{v_s}{f} - \frac{v_c}{v_s}\frac{v_s}{f} \iff \frac{340}{1100} - \frac{340}{1000} \cdot (-1000) = v_c \iff v_c = 30{,}9\ m/s$

$10\ km = 10000$ $\qquad \frac{10\,000}{30{,}9} = \Delta T \iff \Delta t = 323{,}524\ s = 5\ min$

c) i/ $n = 1$ $\qquad$ ii) $\lambda = 2 \cdot 0{,}17$ $\qquad f = 2961\ Hz$

$\lambda = 2L$ $\qquad \lambda = \frac{1007}{x} \iff x = \frac{1007}{2 \cdot 0{,}17}$

$\frac{340}{1000 \cdot 2} = L = 0{,}17\ m$

Problema 5

a) (Exame; 1,5 valores) Um mesão π é uma partícula sub-atómica que tem uma vida média de 26 ns no seu referencial próprio. A que velocidade deverá deslocar-se para que possa percorrer um distância de 10 m no referencial do laboratório?

b) (Exame; 1,5 valores) Um raio γ (fotão de alta energia) pode produzir um eletrão e um positrão quando passa na vizinhança do núcleo de um elemento de elevada massa atómica. Qual a energia mínima de um raio γ necessária para produzir o par eletrão-positrão? (sugestão: lembre-se que as massas do eletrão e do positrão são idênticas: $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg).

a) $l = vt$ $\qquad t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ $\qquad l = v\frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

b) $E = 2 m_e c^2 = 1{,}638 \times 10^{-3}\ J$