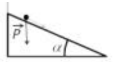
Problema 1

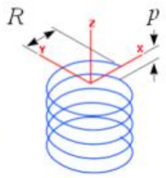
Um corpo pontual de massa m desliza sem atrito, sujeito ao seu próprio peso (força na direcção $-z$), ao longo de um plano inclinado com um ângulo de inclinação α.



a) Mostre que a componente da aceleração do corpo segundo a direcção vertical ($a_z = \ddot{z}$) é dada por: $a_z = \ddot{z} = -g\sin^2\alpha$.

b) Considere agora que o mesmo corpo desliza sem atrito, sujeito ao seu próprio peso, ao longo de uma rampa em forma de hélice (ver figura). Esta curva pode ser descrita, em função do parâmetro z (coordenada na direcção vertical) pelas seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ y = R\sin\left(\frac{2\pi z}{p}\right) \\ z = z \end{cases}$$



R é o raio da hélice e p é o respectivo passo (distância de repetição na direcção vertical).

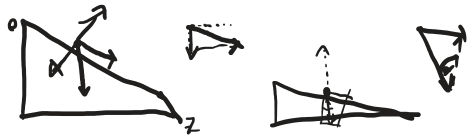
i) Mostre que o módulo da velocidade do corpo no seu movimento ao longo da hélice pode ser dado, em função da coordenada z, por:

$$v = |\dot{z}|\sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2R^2}{p^2}\right)}$$

ii) Determine a função de Lagrange do sistema (massa pontual m) em função da variável z.

c) Determine a equação diferencial do movimento na variável z.

d) Utilizando os resultados da alínea a) e da alínea c) mostre que o movimento ao longo de um troço desta curva correspondente a um passo da hélice ($\Delta z = z_f - z_i = p$) é análogo ao movimento ao longo de um plano inclinado com um comprimento correspondente ao comprimento medido ao longo da hélice e altura z (sugestão: imagine a hélice desenhada num cilindro cuja superfície lateral pode ser "desenrolada").



$$\frac{1}{2} m \frac{\dot{z}^2}{\sin^2\alpha} - mgz$$

$$-mg - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z} m}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$-mg - \frac{\ddot{z} m}{\sin^2\alpha} = 0 \iff \ddot{z} = -g\sin^2\alpha$$

$$m = \frac{F_a}{F_g}$$

$\sin F_g = F_a \qquad m\cancel{g}\cdot g = m\cdot a$

b) $\dot{x} = -R\dot{z}\left(\frac{2\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{2\pi z}{p}\right)$

$\dot{y} = R\dot{z}\left(\frac{2\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{2\pi z}{p}\right)$

$\dot{z} = \dot{z}$

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

$v = \sqrt{R^2\dot{z}^2\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 + \dot{z}^2}$

$v = |\dot{z}|\sqrt{1 + \frac{4R^2\pi^2}{p^2}}$

ii) $L = T - U$

$T = \frac{1}{2}mv^2$

$U = mgz$

c)

$$-mg - \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\left(1 + \frac{4R^2\pi^2}{p^2}\right)\right) = -mg - m\ddot{z}\left(1 + \frac{4R^2\pi^2}{p^2}\right)$$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{\left(1 + \frac{4R^2\pi^2}{p^2}\right)}$$

Problema 3

O período de rotação de Marte é aproximadamente igual ao dia terrestre. Massa de Marte: $M_M = 6{,}42 \times 10^{23}$kg ; raio (médio) de Marte: $R_M = 3{,}37 \times 10^6$m.

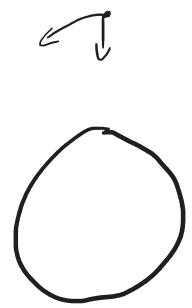
a) Determine a que altitude deve ser colocado um satélite, em Marte, de forma que este se encontre numa posição estacionária. Isto é, pretende-se que o período de rotação do satélite seja igual ao período de rotação do planeta.

b) Calcule o valor da aceleração da gravidade à superfície de Marte. Qual o peso de um objecto em Marte, em função do respectivo peso na Terra.

c) Um relógio de pêndulo com um período de oscilação de 1 segundo (na Terra) é transportado para Marte. Determine se o relógio se atrasa ou adianta quando se encontra nesse planeta e calcule o atraso (ou adiantamento) sofrido relativo durante o intervalo de tempo de uma hora (terrestre).

d) Calcule o valor da velocidade mínima que uma nave deve ter para abandonar a superfície de Marte (velocidade de escape).

20 m



a) $M_M = 6{,}42 \times 10^{23}$

$R_M = 3{,}37 \times 10^6$ m

a) $F_c = -G\frac{Mm}{r^2}$

$a = -\frac{GM}{R^2} \qquad \cancel{m}\omega^2 R = \cancel{m}G\frac{M}{R^2} \iff \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = G\frac{M}{R^2} \qquad R = (R_M + x)^3$

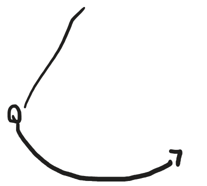
b) $a = \frac{GM}{R^2} = 3{,}77$ m/s

$P_M = 0{,}384 P_T$

$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = 2{,}0 \times 10^7$

$R - R_M = x \iff 1{,}7 \times 10^7$ m

c)



10 na terra

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_M}}$

$0{,}620\,T_M = T$

d) $T = \frac{1}{2}mv^2$

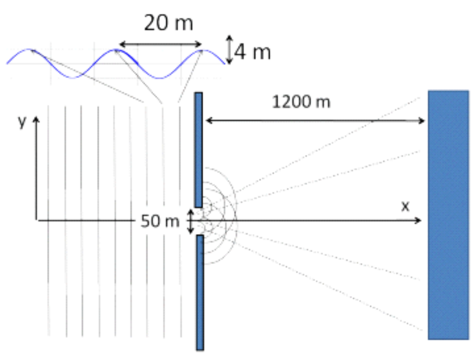
$U = mg_M R$

$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}g_M R$

$v = \sqrt{2gR_M} = 5040$ m/s

Problema 4

Verifica-se que uma onda no mar tem uma forma aproximadamente sinusoidal com uma diferença de quatro metros entre um ponto de máximo e um ponto de mínimo (segundo a direcção vertical, z) e uma distância de 20 m entre dois máximos (ou dois mínimos) segundo a direcção de propagação (x). Por outro lado, observando-se uma boia a flutuar, num ponto fixo da superfície (x, y), verifica-se que esta se desloca num movimento oscilatório segundo a direcção vertical z, com um período de 10 segundos.



a) Indique os valores da amplitude, do número de onda e da frequência angular associados à onda.

b) Determine a velocidade de propagação desta onda e apresente uma expressão matemática para a onda utilizando os valores determinados na alínea a).

c) Suponha que a onda atrás descrita atinge frontalmente a entrada de um porto que tem uma largura de 50 metros (a abertura correspondente à entrada do porto tem a direcção do eixo dos yy, perpendicular à direcção de propagação da onda). Quais os valores dos ângulos, raltivamente ao eixo dos xx, que um barco deve seguir após entrar no porto de forma a sofrer a mínima oscilação possível (isto é, quais são os ângulos que correspondem à amplitude mínima de ondulação no interior do porto).

d) Tendo em conta a distância de 1200 metros (segundo x) entre a entrada dos barcos e uma muralha no extremo oposto do porto, determine as posições mais convenientes para atracar um barco de forma a evitar, o mais possível, as oscilações do mesmo (nas condições definidas nas alíneas anteriores).

a) $A = 2$ m $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}2\pi \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}1\pi$

$\lambda = 20$ m

$T = 10$ s

b) $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{20}{10} = 2$ m/s $\qquad \phi(x,t) = 2\sin(0{,}2\pi t - 0{,}1\pi x + \alpha)$

c) $d\sin(\theta) = m\lambda \iff \sin(\theta) = \frac{\lambda}{d}m$

$\arcsin\left(\frac{2}{5}m\right) = \theta \qquad \pm\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) = \theta$

$\pm\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = \theta$

d) $D = 1200$ m

$\tan(\theta) = \frac{y}{D} \iff$

$y = D\tan(\theta)$