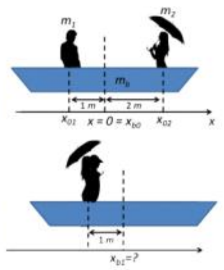
Problema 1 (só exame)



Duas pessoas, José ($m_1 = 70$ kg) e Maria ($m_2 = 50$ kg) estão sentadas num barco a remos num lago de águas muito calmas. José e Maria encontram-se sentados em lados opostos do barco ($m_b = 40\ kg$), José a um metro do centro de massa do barco no sentido da popa (ver figura) e Maria a dois metros do centro de massa do barco no sentido da proa. O barco encontra-se inicialmente em repouso relativamente à água do lago.

a) i) Determine a posição horizontal do centro de massa do sistema barco+José+Maria (x_{CM}) relativa à posição inicial do centro de massa do barco ($x = 0$). (eixo dos xx representado na figura).
ii) Num dado momento, Maria resolve sentar-se ao lado de José. Determine o deslocamento horizontal (distância e sentido) do centro de massa do barco devido a esta mudança de lugar (considere desprezáveis todas as forças entre o barco e a água do lago).

b) Passado algum tempo José desloca-se para a popa do barco e, após o barco se imobilizar relativamente à água do lago, salta para a água.
i) Sabendo que o barco (com Maria a bordo) adquiriu uma velocidade de 0,5 m/s na sequência do salto, determine a componente horizontal da velocidade do José no momento do salto.
ii) Determine variação da energia mecânica do sistema entre os momentos imediatamente anterior e imediatamente posterior ao salto. Considere apenas as componentes horizontais da velocidade.

$m_1 = 70\,kg$
$m_2 = 50\,kg$
$m_b = 40\,kg$

a) i) $\dfrac{50\times2 + 70\times1 + 40\times0}{50+70+40} = 0{,}1875\,m$

ii) $\dfrac{(50+70)\times(-1)+40\times0}{50+70+40} = -0{,}75\,m$

b) $p_1 = p_{2+b}$

$m_1 \cdot v_1 = (m_2+m_b)\,v_{2+b}$

$v_1 = \dfrac{(50+40)\,0{,}5}{70} = 0{,}643\,m/s$

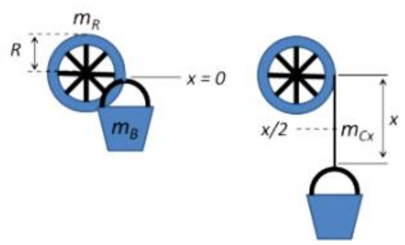
$E_i = T_i + U_i$ $\quad E_i = 0 + 0$

$E_f = T_f + U_f$ $\quad E_f = \frac{1}{2} m \cdot 0{,}5^2 + 0$

$\Delta E = \frac{1}{2}(50+40)\cdot 0{,}5^2 + \frac{1}{2}\,70\,v^2 = 25{,}72\,J$

Problema 2 (só exame)

Um balde encontra-se pendurado numa roldana como representado na figura. Num dado momento a roldana é destravada e o balde cai desenrolando o cabo. O cabo tem um comprimento total C (parte do cabo enrolado mais a parte do cabo desenrolado). A roldana tem uma massa m_R o cabo tem uma massa total m_C e o balde tem uma massa total m_B.



a) Determine e expressão da energia potencial gravítica do sistema, U, quando o balde cai de uma distância x, (note que quando o cabo de desenrola de uma distância x, o centro de massa dessa parte do cabo desce $x/2$, como representado na figura, e a sua massa é $m_{Cx} = (x/C).m_C$).

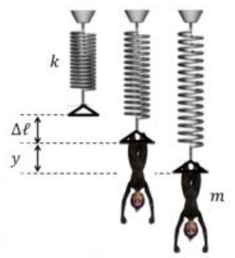
b) Mostre que a velocidade do balde para a distância x é dada por: $v = \sqrt{\frac{(2m_BC+m_Cx)gx}{(m_C+m_B+m_R)C}}$
(sugestão: tenha em conta que a energia do sistema se conserva e considere que a massa da roldana e da parte do cabo enrolado se encontra distribuída na periferia da roldana (à distância R do centro), o momento de inércia da roldana é dado por $I = m_RR^2$ e repare que, nestas condições, quando a roldana roda, a totalidade do cabo desloca-se com velocidade $v = \omega R$).

$U = -\frac{x}{C}\cdot m_C \cdot g \cdot \frac{x}{2} - m_B\, g x = -\left(\frac{m_C x}{2C} + m_B\right) g x$

b) $T = \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{2} m_C v^2 + \frac{1}{2} m_R R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}(m_B + m_C + m_R)\,v^2$

Problema 3 (2º teste e exame)

Uma trapezista de massa m encontra-se suspensa, em equilíbrio, numa mola com constante elástica $k = 2940\ \mathrm{Nm^{-1}}$, inicialmente em repouso (considere a massa da mola desprezável).



a) i) Sabendo que a mola se distende de um comprimento $\Delta l = 0{,}2$ m, relativamente ao seu comprimento natural, quando o trapezista está suspenso, determine a massa da trapezista;
ii) Partindo das condições definidas em i), determine as expressões da energia potencial elástica da mola e da energia potencial gravítica do sistema, considerando as variáveis dadas no enunciado e respectiva figura, quando a mola se desloca de uma distância y relativamente à posição de equilíbrio.

b) i) Escreva o Langrangeano do sistema para o movimento vertical da trapezista (variável y) (considere a massa total do trapezista localizada no respectivo centro de massa e despreze as forças de atrito);
ii) determine a equação diferencial do movimento do sistema e mostre que a frequência de oscilação é idêntica à que obteria para um movimento horizontal da mesma mola ligada a uma massa idêntica;

$k = 2940\,Nm^{-1}$

$kx = mg \iff \dfrac{2940\times0{,}2}{9{,}8} = m \iff 60\,kg = m$

$U_{el} = \frac{1}{2} k(\Delta l + y)^2$

$U_g = -mgy$

b) $L = T - U$

$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

$U = \frac{1}{2} k(\Delta l + y)^2 + mgy$

$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = 0$

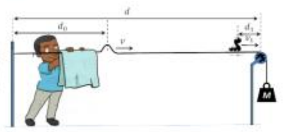
$k(\Delta l + y) - mg - m\ddot{y} = 0 \iff$

$\ddot{y} - \frac{k}{m} y = 0$

$\ddot{y} - \omega_0^2 y = 0$

idêntica à que obteria para um movimento horizontal da mesma mola ligada a uma massa idêntica;

Problema 4 (2º teste e exame)



A corda de um estendal de roupa (de comprimento $d = 12$ m e massa total de $m = 0{,}15\ kg$) é mantida em tensão por uma massa de $M = 8$ kg suspensa de um dos extremos, como indicado na figura.

a) Ao começar a estender a roupa, um homem vê uma lagarta sobre a corda da roupa, a uma distância $d_1 = 1{,}2$ cm do lado oposto do estendal. Numa atitude algo impiedosa perante o verme inofensivo, o homem dá um "piparote" (percussão) na corda, produzindo uma perturbação local (impulso) com 2 cm de amplitude que irá deslocar-se pela corda, a partir de um ponto a uma distância $d_0 = 2$ m do extremo esquerdo da corda (ver figura), pondo em risco a segurança do bicho. Numa corrida contra o tempo, o nosso verme irá deslocar-se (a partir do momento em que o impulso se começa a deslocar) a uma velocidade de 2,4 cm/s para fugir da sua terrível sorte. Determine se a lagarta consegue chegar ao suporte do estendal antes de ser alcançada pelo impulso.

b) Se em vez de um impulso local, a corda for ligeiramente deformada a cerca de metade do comprimento e posteriormente largada pode produzir-se uma onda estacionária na mesma.
i) Determine, em função dos dados do problema, o valor da frequência de oscilação da corda no modo fundamental (corda fixa em ambas as extremidades);
ii) qual o valor da massa M que deveria estar suspensa na corda para que a mesma produzisse uma onda de som com uma frequência de 16 Hz;
iii) qual seria o valor do comprimento de onda desse mesmo som no ar? ($v_{som(ar)} = 340\ \mathrm{ms^{-1}}$).

$d = 12\,m$
$m = 0{,}15\,kg$
$M = 8\,kg$

a) $d_1 = 1{,}2\,cm = 0{,}012\,m$
$A = 0{,}02\,m$
$d_0 = 2\,m$
$v_1 = 2{,}4\,cm/s = 2{,}4\times10^{-2}\,m/s$

$v_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{8\times9{,}8}{\frac{0{,}15}{12}}}$

$\begin{cases} 2 + v_0 t = x \\ 11{,}988 + vt = x \end{cases}$ $\quad 2 + v_0 t = 11{,}988 + vt$

$t(v_0 - v) = 11{,}988 - 2$

b) $v = \lambda f$

$\lambda f = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \iff f = 3{,}249\,Hz$

ii) $2\cdot12\cdot16 = \sqrt{\dfrac{x\times9{,}8}{\frac{0{,}15}{12}}} \iff \dfrac{2\cdot12\cdot16\cdot\sqrt{\frac{0{,}15}{12}}}{\sqrt{9{,}8}} = \sqrt{x} \iff x = (13{,}7)^2\,kg$ $\quad t = \dfrac{11{,}988-2}{v_0 - v}$

iii) $f = 16\,Hz$ $\quad \frac{340}{16} = \lambda \iff \lambda = 21{,}25\,m$

Problema 5 (2º teste e exame)

Uma partícula com massa de $m_1 = 1\ \mathrm{GeV/c^2}$ e energia (total) $E_1 = 5$ GeV colide com uma partícula de massa $m_2 = 3\ \mathrm{GeV/c^2}$ em repouso. Após a colisão as duas partículas permanecem juntas. Determine

a) O momento linear inicial do sistema.
b) i) A velocidade final do sistema formado pelas duas partículas;
ii) a massa do sistema formado pelas duas partículas.

Nota: 1 GeV = 10^9 eV; 1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J.

$m_1 = 1\,\frac{GeV}{c^2}$
$E_1 = 5\,GeV$

$m_2 = 3\,\frac{GeV}{c^2}$

b) i) $P_f = \dfrac{Mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\quad \dfrac{P_f}{E_f} = \dfrac{v}{c^2}$

$E_f = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

$5^2 = 1 + p^2c^2 \iff \sqrt{24}\,GeV/c$

$v = \dfrac{P_f c^2}{E_f} = \dfrac{\sqrt{24}\,GeV\,c}{(5+3)\,GeV} = \dfrac{\sqrt{24}}{8}\,c$