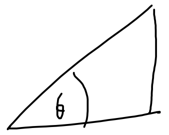


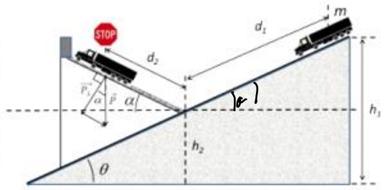
$\sin = \frac{h}{d}$

$\sin(\theta)\, d = h$

72 km/h = 20 m/s

Problema 1

Em certas estradas com descidas extensas e muito inclinadas, existem rampas escapatórias laterais, destinadas a permitir uma paragem de emergência a veículos em que eventualmente ocorra uma avaria no sistema de travagem. Estas escapatórias laterais têm inclinação oposta à estrada e um pavimento de gravilha solta com elevado coeficiente de atrito.



a) Considerando que a estrada principal tem uma inclinação $\theta = 12°$, e que os travões do camião falham quando este se encontra a uma distância $d_1 = 300$ m da escapatória de emergência e circula com uma velocidade inicial de módulo $v_0 = 72$ km/h, determine a velocidade máxima com que o camião chega ao início da saída de emergência (despreze forças de atrito na estrada principal).

b) Sabendo que a inclinação da rampa de emergência é $\alpha = 14{,}5°$, admitindo que a força de atrito é proporcional à componente do peso perpendicular à rampa ($\vec{F}_a = -KP_\perp \vec{e}_v$) e que o camião, nas circunstâncias definidas na alínea a) se imobiliza a uma distância $d_2 = 60$ m do início da rampa:

i) Escreva as expressões da energia mecânica (energia cinética + energia potencial gravítica) do camião no início da rampa de emergência e no ponto em que este se imobiliza, em função dos parâmetros dados no enunciado;

ii) determine o valor do coeficiente de atrito, K, do pavimento da rampa escapatória. Se não resolveu a alínea a) considere que a velocidade do camião no início da rampa de emergência é $v_1 = 144$ km/h;

a) $T_f = T_i + U_i \iff \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh \iff v_f^2 = 20^2 + 2\cdot 9{,}8\cdot \sin(12)\cdot 300 \iff v_f = 40.28$ m/s

b)

i) $E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_2$

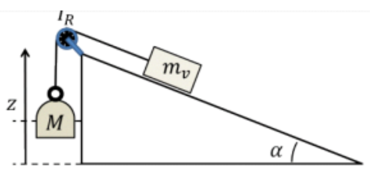
$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg(h_2 + d_2\sin(\alpha)) = mg(h_2 + d_2\sin(\alpha))$

ii) $W_F = E_f - E_i \iff K\cdot \cancel{m}\cdot g\cdot \cos(\alpha)\cdot d_2 = \cancel{m}g(h_2 + d_2\sin(\alpha)) - \frac{1}{2}\cancel{m}v_i^2 - \cancel{m}gh_2 \iff$

$\iff K = \frac{\cancel{gh_2} + gd_2\sin(\alpha) - \frac{1}{2}v_i^2 - \cancel{gh_2}}{g\cos(\alpha)\cdot d_2}$

Problema 2

Um sistema de elevação de pesos é constituído por uma roldana de momento de inércia I_R e por uma rampa (idealmente) sem atrito onde se colocam massas de valor variável m_v de modo a controlar a aceleração da massa a elevar M. A inclinação da rampa é definida pelo ângulo α indicado na figura.



a)

i) Escreva as expressões da energia cinética e potencial do sistema em função da coordenada z (distância do centro de massa de M à origem – ver figura) e dos parâmetros dados no enunciado (despreze a massa da corda que une os corpos de massa M e m_v).

ii) escreva a expressão do Lagrangeano do sistema em função de z.

Sugestão: note que, uma vez que a corda não é extensível e não desliza na roldana, a distância percorrida pela massa m_v ao longo da rampa é igual à distância percorrida pela massa M a elevar na vertical e que quando as massas se deslocam de uma distância z, a roldana perfaz uma rotação de um ângulo $\theta = z/R$ (em que R é o raio da roldana).

b)

Determine a expressão da aceleração da massa M em função dos parâmetros dados no enunciado.

$T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_v\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{z}}{R}\right)^2$

$T = \frac{1}{2}\dot{z}^2\left(M + m_v + \frac{I}{R^2}\right)$

$U = Mgz - m_v g z\sin(\alpha)$

$L = T - U$

$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \iff$

$\iff Mg - m_v g\sin(\alpha) - \ddot{z}\left(M + m_v + \frac{I}{R^2}\right)$

$\ddot{z} = \frac{+Mg + m_v g\sin(\alpha)}{M + m_v + \frac{I}{R^2}}$

Problema 3

Os relógios de pêndulo têm um braço no extremo do qual é colocada uma massa. O ritmo de um relógio deste tipo pode ser ajustado deslocando a massa ao longo do braço.

a) i) Qual o comprimento de braço (ℓ) necessário para que uma oscilação completa (ir e vir) tenha a duração de um segundo (despreze a massa do braço face à massa colocada no extremo deste);

ii) Um astronauta que herdou o relógio de pêndulo, resolve levá-lo para a Lua e deixá-lo ao lado da bandeira em homenagem à avozinha. Quanto tempo passa na Lua, enquanto o relógio (calibrado na Terra) marca a passagem de uma hora? (Massa da Terra: $5{,}972 \times 10^{24}$ kg ; Raio da Terra: 6 371 km; Massa da Lua: $7{,}348 \times 10^{22}$ kg; Raio da Lua: 1737 km).

b) i) Escreva a expressão da posição angular do pêndulo do relógio, em função do tempo, para pequenas oscilações entre um ângulo máximo θ_0 e um ângulo mínimo $-\theta_0$, utilizando os parâmetros relativos a a)i) (relógio na Terra), considerando que $\theta = \theta_0$ para $t = 0$ (despreze o efeito de todas as forças de atrito);

ii) Ainda em função dos parâmetros considerados em a)i) (relógio na Terra), determine as expressões da velocidade angular e da aceleração angular para o ângulo $\theta = 0$ na forma mais simplificada possível (despreze o efeito de todas as forças de atrito). (Sugestão: repare que, nas condições definidas no enunciado, $\theta = 0$ corresponde a $t = \frac{T}{4}$ em que T é o período de oscilação do pêndulo).

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \iff 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}} \iff (2\pi f)^2 \cdot l = g \iff l = \frac{g}{(2\pi)^2} = 0{,}248$ m

$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\,2\pi$

Terra $T = \sqrt{\frac{l}{G\frac{M}{R^2}}}\,2\pi$

Lua $T = \sqrt{\frac{l}{G\frac{m}{r^2}}}\,2\pi$

$\frac{1}{T_L} = \frac{\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{G\frac{M}{R^2}}}}{\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{G\frac{m}{r^2}}}} \iff T_L = \frac{\sqrt{\cancel{G}\frac{M}{R^2}}}{\sqrt{\cancel{G}\frac{m}{r^2}}} = 2{,}45$ horas

b) i) $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t)$

$\omega = -\theta_0\,\omega_0\sin(\omega_0 t) = -\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}$

a_θ $\;{}^2_\theta\, \omega_0 \cos(\omega_0 t) = 0$

Problema 5

Num laboratório de física é detetada uma partícula e são medidos o módulo do momento linear e a energia respetivos.

a) Sabendo que se obtiveram os valores $p = 3$ GeV/c e $E = 5$ GeV, para o momento linear e para a energia (no referencial do laboratório), determine a massa da partícula.

b) Se o laboratório estiver situado numa nave que se afasta da Terra com uma velocidade de módulo $v = \frac{2}{5}c$ (em relação à Terra), e a partícula descrita na alínea a) se deslocar na mesma direcção e sentido da nave, qual será o valor da velocidade da partícula relativamente a um observador em repouso na Terra.

Nota: 1 GeV = 10^9 eV; 1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \iff 25\,GeV^2 = m^2c^4 + \frac{9\,GeV^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2}$

$\sqrt{\frac{16\,GeV^2}{c^4}} = m \iff 4\,GeV/c^2 = m$ $\quad v = \frac{3}{5}c$

b) $\frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}c}{\left(1 + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)} = \frac{25}{31}c$

Problema 4

Um pescador desportivo, aborrecido pelo passar das horas na praia à espera do peixe que não pica, resolve construir um instrumento musical rudimentar usando linha de nylon (fio de pesca) com uma densidade linear de 1,28 g m^{-1} e seixos que pendura nas cordas para as manter em tensão (ver figura).

a) Sabendo que o pescador coloca 8 seixos, cada um com uma massa de 640 g, pendurados em cada corda, determine os comprimentos das cordas (entre os dois extremos fixos) de forma a produzirem sons no modo fundamental (corda presa nos extremos) com as notas respetivamente de Mi_4 (330 Hz), Si_3 (246 Hz), Sol_3 (196 Hz), Ré_3 (146 Hz).

b) No momento em que o pescador toca a corda que produz a nota Mi (330 Hz), uma gaivota passa por ele em voo rasante. A gaivota (que tem um ouvido musical extraordinário) deteta uma diferença de

8 Hz entre a frequência do som que ouve enquanto se aproxima e aquela do som que ouve enquanto se afasta. Qual é a velocidade da gaivota? ($v_{som} = 340$ ms^{-1}).

$\mu = 1{,}28$ g/m

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $\lambda = vT$, $f = \frac{1}{T}$ $\iff$ $\lambda f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $v = \lambda f$, $f = \frac{1}{T}$ $\iff$ $L = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\cdot\frac{1}{2f} \iff L = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}\cdot\frac{1}{2f}$

$\lambda = 2L$

Mi

$L = \sqrt{\frac{8\times 0{,}64\times 9{,}8}{1{,}28}}\cdot\frac{1}{2\cdot 330} = 0{,}299$ m $\approx 0{,}3$ m

$f_{af} = f\left(1 - \frac{v_0}{v}\right)$

$f_{ap} = f\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$

$f_{ap} = \cancel{f_{af}}\cdot f$

$f_{af} + 8 = f\left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$

$8 = f\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) - f\left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \iff$

$8 = \cancel{f} + f\frac{v_0}{v} - \cancel{f} + f\frac{v_0}{v} \iff \frac{4v}{f} = v_0$

4 m/s