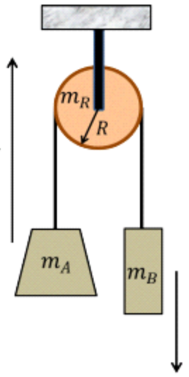
Problema 1

O esquema da figura corresponde a um sistema de elevação de cargas em que a aceleração é determinada em função da massa do corpo a elevar (m_A), da massa do contrapeso (m_B) e da massa da roldana (m_R).



a) Escreva o Lagrangiano do sistema e a equação do movimento para a variável x correspondente à deslocação da massa do corpo a elevar, m_A, (x positivo corresponde ao corpo de massa m_A a subir). Utilize os parâmetros dados no enunciado e considere, como aproximação, que a roldana pode ser considerada como um cilindro maciço de raio R; despreze a massa do cabo que une os dois corpos. Sugestão: lembre-se que quando a roldana roda de um ângulo θ, o corpo de massa m_A (e também o contrapeso m_B) desloca-se de uma distância $x = R\theta$.

b) Determine o tempo que a massa m_A, leva a percorrer a distância de 2 m, partindo do repouso, considerando que as massas têm os valores $m_A = 5$ kg, $m_B = 6$ kg, $m_R = 2$ kg.

a) $L = T - U$

$T = \frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$U = (m_A+m_B)gh$

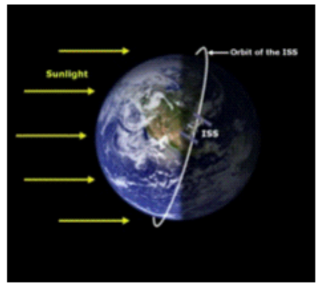
$L = \frac{1}{2}(m_A+m_B)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - (m_A-m_B)gh$

$\ddot{x} = \frac{(m_B-m_A)g}{m_A+m_B+\frac{m_R}{2}}$ $\qquad \omega = \frac{v}{R}$

b) $x = \frac{1}{2}a_x t^2$ $\qquad 2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{(6-5)9{,}8}{6+5+\frac{2}{2}}$

Problema 2

A Estação Espacial Internacional (ISS) realiza um total de 15,7 órbitas por dia.



a) Com base nesta informação, estime a que altitude se encontra a estação espacial (sugestão: considere, como aproximação, a órbita da ISS como sendo circular e a Terra aproximadamente esférica; lembre-se que a altitude h é definida como $h = r - R_T$, em que r é a distância entre a estação espacial e o centro da Terra e $R_T = 6371$ km é o raio (médio) da Terra; $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$; massa da Terra: $M_T = 5{,}9722 \times 10^{24}$ kg.

b) i) Mostre que a energia mecânica (cinética+potencial) de um corpo numa órbita circular é dada pela expressão: $E = U/2$ (em que U é a energia potencial gravítica) e calcule a energia cinética da ISS, considerando que a respetiva massa é $m_{ISS} = 419500$ kg.
ii) Calcule o módulo da velocidade da ISS.
(Se não resolveu a alínea anterior considere um valor aproximado $h = 360$ km para a altitude da ISS).

a) $T = \frac{24\times60\times60}{15{,}7} = 5503{,}18$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad a_N = \omega^2 R$ $\qquad \omega^2 = G\frac{M}{R^3}$

$\omega^2 R = G\frac{M}{R^2}$

$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$

$6371000 + x = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$

$x = 366\,\mathrm{km}$

b) i) $E = \frac{U}{2}$

$v^2 = \omega^2R^2 = \frac{GM}{R^3}R^2 = \frac{GM}{R}$

$E = U + T = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{GMm}{R}\right)$

$= \frac{1}{2}U$ //

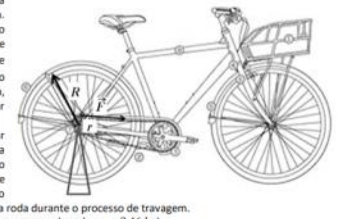
$T = -\frac{1}{2}U = 1\times10^{13}\,\mathrm{J}$

$\sqrt{\frac{2T}{m}} = v = 7691{,}28\,\mathrm{m/s}$

$v = R\omega$

Problema 3

Numa oficina, pretende-se testar o funcionamento da bicicleta representada na figura, colocando-se o eixo da roda traseira assente num suporte, de forma a que esta possa rodar livremente. Através dos pedais e da corrente da bicicleta, é aplicada uma força $\vec{F}$, perpendicularmente ao raio de uma cremalheira de raio r. Considere, como aproximação, que a roda da bicicleta pode ser descrita como um aro de raio de R (de espessura desprezável) e massa total m.



a) Pretende-se calcular o valor da massa da roda, sem a desmontar da bicicleta. Determine essa massa, sabendo que o raio da roda tem o valor $R = 0{,}36$ m, e que, ao aplicar uma força $\vec{F}$, constante, de módulo $|\vec{F}| = 25$ N, à cremalheira de raio $r = 8$ cm, durante 4 segundos, a roda, inicialmente em repouso, passa a efetuar 240 rotações por minuto.

b) i) Calcule o tempo que a roda leva a parar (partindo da condição definida na alínea anterior) se aplicar uma força de atrito por fricção, constante com um módulo de valor $F_a = 25$ N, na superfície exterior do pneu; ii) Determine a energia perdida pela roda durante o processo de travagem.
(Se não resolveu a alínea anterior considere a massa da roda $m = 2{,}46$ kg).

a) $R = 0{,}36\,\mathrm{m}$

$|\vec{F}| = 25\,\mathrm{N}$

$r = 0{,}08\,\mathrm{m}$

$m = ?$

$|F| = ma$

$N = rF$

$N = \frac{\Delta L}{\Delta t}$

$rF = \frac{I\omega_f - \cancel{I\omega_i}}{\Delta t}$

$rF = \frac{I\omega_f}{\Delta t}$ $\qquad I = mR^2$

$rF = \frac{I\frac{2\pi}{T}}{\Delta t}$

$rF = \frac{mR^2\frac{2\pi}{T}}{\Delta t}$

$\frac{rFT\Delta t}{R^2 2\pi} = m$

b) $N = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 - I\omega_i}{\Delta t}$

$\Delta t = \frac{-I\omega_i}{R\cdot F} = \frac{-mR^{\cancel{2}}\frac{2\pi}{T}}{\cancel{R}F}$

$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}$

Problema 4

A suspensão de um automóvel pode ser descrita de forma simplificada, considerando uma mola de constante elástica k, equivalente ao conjunto de molas do sistema, e uma força de atrito $\vec{F}_a = -\mu\frac{dz}{dt}\vec{e}_z$, correspondente aos amortecedores (em que o eixo dos zz representa a direção vertical associada ao movimento oscilatório do sistema).

a) Sabendo que a suspensão do carro foi dimensionada para que o sistema oscilante se encontre nas condições de regime aperiódico limite para uma constante elástica equivalente $k = 2 \times 10^5\ \mathrm{Nm^{-1}}$ e uma massa total (veículo+carga) $m = 1200$ kg, determine o coeficiente de atrito μ associado aos amortecedores.

b) Suponha que, para um certo conjunto de passageiros e carga do veículo, a massa do sistema passa a ter o valor $m' = 1400$ kg (para a mesma constante elástica e mesmo coeficiente de atrito). Determine qual o valor da frequência das oscilações livres do sistema nestas condições. Se não resolveu a alínea anterior considere um coeficiente de atrito $\mu = 31 \times 10^3\ \mathrm{Nm^{-1}s}$. Escreva a expressão que descreve estas oscilações (posição vertical, z, do centro de massa em função do tempo) nas condições definidas nesta alínea, indicando os valores dos parâmetros físicos envolvidos.

$k = 2\times10^5\ \mathrm{Nm^{-1}}$ $\qquad \vec{F}_a = -\mu\dot{z}\vec{e}_z$

$m = 1200\,\mathrm{kg}$

$\lambda = \omega_0$

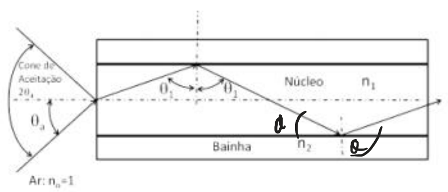
$\lambda = \frac{\mu}{2m}$ $\qquad \frac{\mu}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad \mu = 2\sqrt{mk} = 3{,}098\times10^4\,\mathrm{N/ms}$

b) $m' = 1400\,\mathrm{kg}$ $\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Problema 5

Uma fibra ótica é constituída por um corpo central (núcleo), de índice de refração n_1, envolvido por uma camada exterior (bainha) cujo índice de refração n_2 é inferior a n_1, de modo a permitir a propagação da luz ao



longo da fibra pelo fenómeno de reflexão interna total. O chamado cone de aceitação de uma fibra ótica é definido pelo ângulo máximo de incidência de um raio luminoso proveniente no exterior (de índice de refração n_o) que se propaga para o interior da fibra nas condições de reflexão interna total. Este ângulo é definido entre o eixo longitudinal da fibra e o raio incidente (ver figura).

a) Mostre que o ângulo θ_a que define o cone de aceitação de uma fibra ótica obedece à expressão

$$n_o\, sin\theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Sugestão: Comece por impor a condição definida pelo ângulo crítico de reflexão total para a reflexão no interior da fibra.

b) i) Se uma fibra ótica cujo núcleo (interior) apresenta um índice de refração $n_1 = 1{,}5$ e cuja bainha (exterior) apresenta um índice de refração $n_2 = 1{,}4$, para a radiação utilizada, for mergulhada em água qual será, nestas condições, o valor do ângulo θ_a. ii) Seria possível construir uma fibra ótica com núcleo de água, utilizando o mesmo material da bainha da fibra ótica considerada neste problema? Justifique de forma sucinta mas completa, utilizando as expressões matemáticas necessárias.
Velocidade da luz na água $= 2{,}25 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$.

$n_2\sin(\theta_a) = \sin(\theta_1)\,n_1$

$\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$

$n_0\sin(\theta_a) = n_1\sin(\theta_1)$

$n_0\sin(\theta_a) = n_1\cos(\theta_1)$

$n_0\sin(\theta) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ $\qquad n = \frac{c}{v} = 1{,}33$

$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{(1{,}5)^2 - 1{,}4^2}}{n_{agua}}$

$\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1{,}5^2 - 1{,}4^2}}{1{,}33}\right) = 23{,}88^\circ$