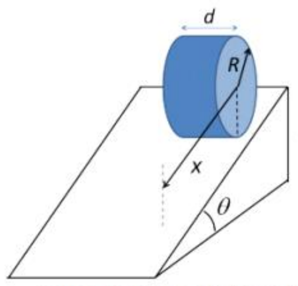
Problema 2



Uma lata oca de forma cilíndrica, com paredes de espessura desprezável e uma massa por unidade de superfície $\sigma = 200\ \mathrm{g/m^2}$ rola sem deslizar ao longo de uma rampa plana caracterizada por um ângulo de inclinação $\theta = 30°$. A lata tem um raio de base $R = 12$ cm e uma altura $d = 20$ cm (ver figura).

a) Calcule o momento de inércia da lata. (Nota: o momento de inércia de um disco de massa m de espessura desprezável é dado por $I = \frac{1}{2}mR^2$

b) Determine a expressão das energias cinética e potencial gravítica da lata quando esta rola sem deslizar ao longo da rampa, em função da variável x_{CM} que define a posição do centro de massa da lata ao longo do plano inclinado. (sugestão: lembre-se que quando a lata roda de um ângulo α o respectivo centro de massa percorre uma distância $x_{CM} = R\alpha$). Escreva as expressões em função do momento de inércia I e da massa total da lata M, não é preciso substituir pelos valores encontrados na alínea anterior.

c) Escreva a equação de Lagrange para a variável x_{CM} e determine a expressão da aceleração do centro de massa da lata em função dos parâmetros definidos na alínea b).

d) Suponha agora que a lata desliza **sem rolar** sujeita a uma força de atrito constante, **proporcional à componente do peso normal ao plano** $\vec{F}_a = -KP_{\perp}\vec{e}_v$. Qual o expressão da constante K, cujo efeito permitiria obter uma aceleração do centro de massa igual à que a lata tem quando rola sem atrito?

$\sigma = 200 g/m^2 = 0,2\ Kg/m^2$

$\theta = 30°$

$R = 0,12 m$

$d = 0,2 m$

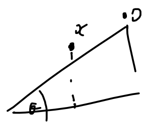
a) $I = 2 \cdot \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 =$

$= A_D \cdot \sigma R^2 + A_P \sigma R^2 =$

$= \pi (0,12)^4 \cdot 0,2 + 2\pi\, 0,12 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot (0,12)^2 =$

$= 5,645 \times 10^{-4}\ Kg\, m^2$

b) $T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_{CM} + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}_{CM}}{R^2}$



$U = -mgh = -mg \cdot x_{CM} \sin(\theta)$

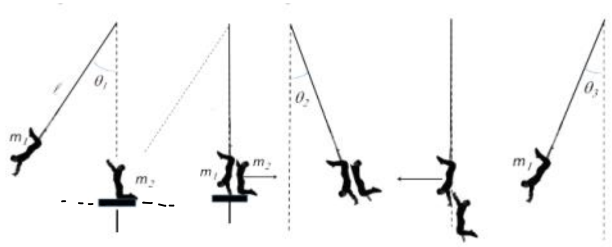
c) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \dot{x}_{cm}^2 \left(m + \frac{I}{R^2} \right) + mg\, x_{cm} \sin(\theta)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow mg \sin(\theta) - \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_{CM}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{mg \sin(\theta)}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)} = \ddot{x}_{CM}$

d) $F_x = P_x - KP_{\perp} = Mg\sin(\theta) - KMg\cos(\theta) -$

$g\sin(\theta) - Kg\cos(\theta) =$

$a_x = g\sin(\theta) - Kg\cos(\theta)$



Problema 1

Um trapezista de massa $m_1 = 60$ kg inicia um movimento pendular (sem impulso inicial) partindo do repouso, de uma posição caracterizada por um ângulo $\theta_1 = 60°$. O trapézio tem uma extensão $\ell = 8$ m, considerando a distância desde o ponto de suporte até ao centro de massa do trapezista. Considere como aproximação que os trapezistas podem ser considerados como corpos pontuais localizados no respectivo centro de massa (ver figura). Despreze o efeito das forças de atrito.

a) Determine o módulo da velocidade do trapezista quando este passa pelo ponto caracterizado por $\theta = 0$ (trapézio na vertical)

b) Se no momento em que passa pelo ponto definido na alínea anterior, o primeiro trapezista, segurar uma parceira de massa $m_2 = 50\,kg$ e os dois continuarem o movimento pendular, qual será a velocidade inicial do conjunto dos dois acrobatas.

c) Determine a ângulo máximo θ_2 atingido pelo conjunto dos dois trapezistas (ver figura).

d) Suponha que após atingirem a posição correspondente ao ângulo θ_2, os trapezistas continuam a oscilar (sem estarem sujeitos a qualquer impulso) e ao voltarem para trás, a trapezista se solta do trapézio exactamente no ponto correspondente a $\theta = 0$ (trapézio na vertical). Determine a velocidade do primeiro trapezista exactamente após o momento em que a parceira abandona o trapézio e o ângulo θ_3 atingido por este.

d)

$\frac{\frac{1}{2} v^2}{g} = l - l\cos(\theta)$

$\frac{v^2}{2gl} - 1 = -\cos(\theta)$

$m_1 = 60\ Kg$

$\theta_i = 60°$

$l = 8 m$

$\cos(\theta) = \frac{A}{l}$

a) $E_i = mgh = mg \cos(\theta_i)\, l = 2352$

$E_f = \frac{1}{2} m v^2$

$\sqrt{\frac{2352 \cdot 2}{60}} = v$

$8,85\ m/s \simeq v$

c)

$p_i = p_f$

$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h \quad \frac{\frac{1}{2} v^2}{g} = h$

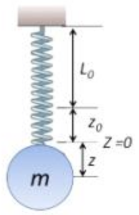
$m_1 \cdot v_i = (m_1 + m_2)\, v_f$

$v_f = 4.83\ m/s$

c) $E_i - \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = 1282,41$

$E_f = mgh = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot l$

Problema 3



Considere um sistema composto por uma mola vertical em que é suspensa uma massa m

a) Determine a constante elástica da mola k, sabendo que esta se distende de uma distância de $z_0 = 1{,}96$ cm, quando nela suspendemos uma massa de 100 g.

b) Qual seria o valor de z_0 se repetíssemos esta experiência em Marte (($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$; dados relativos a Marte - massa: $M = 6{,}42 \times 10^{23}$ kg, raio médio: $R_M = 3{,}37 \times 10^6$ m))?

c) Mostre que a frequência de oscilação é a mesma para a mola na vertical (em que a massa se encontra sujeita à força elástica da mola e ao seu próprio peso) do que a que obtemos para a mola que oscila na horizontal (sugestão: considere $z = 0$, a posição correspondente à posição de equilíbrio estático da mola, em que o peso iguala a força elástica) (despreze o atrito).

d) Considere agora que mergulha o corpo de massa m, corresponde a um objecto esférico com um raio $R = 8$ mm , num fluido em que o coeficiente de atrito é dado por $\mu = 6\pi R\eta$, sendo η a viscosidade do fluido. Qual o valor da viscosidade do fluido, para a qual o sistema deixa de oscilar, isto é para a qual o sistema se encontra no regime aperiódico limite (se não resolveu a alínea a) considere $k = 50\ \mathrm{Nm^{-1}}$)?

a) $U_f - U_i = W_F \Leftrightarrow 0,0196 \times 9,8 \times 0,1 - W_F \Leftrightarrow 0,0196 \times 9,8 \times 0,1 = K \cdot x \cdot \cancel{d}$

$k = 50$

b) $F = -Kx$

$m \cdot g = -Kx \quad \frac{m \cdot g_M}{k} = x \Leftrightarrow$

c) $mg - Kz = 0 \Leftrightarrow m\ddot{z} = -Kz$

$\ddot{z} + \frac{K}{m} z = 0$

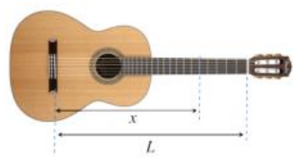
c) $\omega_0 = \lambda$

$\lambda = \frac{\mu}{2m} \Leftrightarrow \lambda = \frac{6\pi R \eta}{2m} \Leftrightarrow \omega_0 = \ldots$

$\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{6\pi R \eta}{2m} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{K} \cdot 2m}{\sqrt{m}\ 6\pi R} = \eta$

Problema 4

A primeira corda de uma guitarra clássica corresponde à nota *Mi* ($f \cong 330$ Hz) e a segunda a *Si* ($f \cong 247$ Hz).



a) Tendo as duas cordas o mesmo comprimento (trata-se de uma guitarra) e supondo que as duas estão sujeitas à mesma tensão, qual é a relação entra as respectivas massas?

b) Para afinar o instrumento é habitual, uma vez afinada a primeira corda, premir a segunda corda num dado ponto de modo a que esta, agora "encurtada", produza um som com a mesma frequência da primeira corda solta no modo fundamental. Determine a posição x/L deste ponto da segunda corda de acordo com a figura. (lembre-se que a mesma corda está sempre sujeita à mesma tensão).

c) Se a primeira corda for tocada levemente exactamente a meio do comprimento respectivo, esta produz um som correspondente a um modo de oscilação em que o deslocamento vertical do ponto médio é nulo (nodo). Nestas condições qual a frequência do som produzido e qual o comprimento da onda sonora correspondente que se propaga no ar (considere a velocidade do som no ar $v = 340\ \mathrm{ms^{-1}}$) .

d) Escreva a expressão matemática da onda estacionária **correspondente ao modo de oscilação descrito na alínea c)**, em função da frequência do modo fundamental (f_1) e do comprimento da corda (L). Faça um esquema da corda para $t = 0; t = \frac{T}{4}; t = \frac{T}{2}; t = \frac{3}{4}T; t = T$.

a) $v = \sqrt{\frac{\mu}{T}}$

$\lambda f = \sqrt{\frac{\mu}{T}}$

$\lambda f = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{L}}{T}}$

$\lambda f = \sqrt{\frac{\frac{M_2}{L}}{T}}$

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{\frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{L}}}{\sqrt{T}}}{\frac{\frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{L}}}{\sqrt{T}}} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{L}}}{\frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{L}}}$

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_2}}$

$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 M_2 = M_1 \quad 1,785\ M_2 = M_1$

b) $\lambda_1 = 2L$

$\lambda_2 = \frac{x}{L}$

$\frac{x}{L} = 0,75$

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$f_2 = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

c) $L = \lambda$

$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Leftrightarrow f_2 = 2 \times 330 = 660$

$v_{som} = \lambda_{ar} f \Leftrightarrow \frac{340}{660} = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0,5$

d)