Modelação e linearização

1º Escrever equações

2º Determinar ponto de equilíbrio

3º Aproximação linear usando Série de Taylor

Propriedades da TL

$$A x_1(t) + B x_2(t) \rightarrow A X_1(s) + B X_2(s)$$

$$x(at) \rightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \; a > 0$$

$$x(t-T)u(t-T) \rightarrow e^{-sT} X(s), \; T > 0$$

$$e^{-\alpha t} x(t) \rightarrow X(s+\alpha)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow sX(s) - x(0^-)$$

$$t\,x(t) \rightarrow -\frac{dX(s)}{ds}$$

$$\int_0^t x(\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{X(s)}{s}$$

$$x(0^+) \rightarrow \lim_{s\to\infty} sX(s)$$ Teorema do Valor Inicial

$$x(\infty) \rightarrow \lim_{s\to 0} sX(s)$$ Teorema do Valor Final

Resposta no tempo

TL de alguns sinais

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$u(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \rightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

$$t^m u(t) \rightarrow \frac{m!}{s^{m+1}}$$

$$t^m e^{-\alpha t}u(t) \rightarrow \frac{m!}{(s+\alpha)^{m+1}}$$

$$\sin(\beta t)u(t) \rightarrow \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\cos(\beta t)u(t) \rightarrow \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

$$t\,e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t) \rightarrow \frac{\beta \cdot 2 \cdot (s+\alpha)}{((s+\alpha)^2+\beta^2)^2}$$

$$t\,e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t) \rightarrow \frac{(s+\alpha)^2-\beta^2}{((s+\alpha)^2+\beta^2)^2}$$

Sistema de 1ª ordem

$$y(t) = K_0 - K_0 e^{-\alpha t}$$

$$G(s) = K_0 \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$t_s(a\%) = -\frac{\ln\left(\frac{a}{100}\right)}{\alpha}$$

↑ tempo de estabelecimento

$$K_0 = \lim_{s\to 0} G(s)$$ (Ganho estático)

Sistema de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{\omega_m^2}{s^2 + 2\zeta\omega_m s + \omega_m^2}$$

ω_m - frequência natural

ζ - coeficiente de amortecimento

ω_d - frequência amortecida ($\omega_d = \omega_m\sqrt{1-\zeta^2}$)

$0 \leq \zeta < 1$ - Subamortecido

Polos:

$$-\zeta\omega_m \pm j\omega_m\sqrt{1-\zeta^2}$$

$\zeta = 1$ - Criticamente amortecido

$$-\zeta\omega_m = -\omega_m$$

$\zeta > 1$ Sobreamortecido

$$-\zeta\omega_m \pm \omega_m\sqrt{\zeta^2-1}$$

(na origem, na resposta da $u(t)$, o valor é 0)

Sistema de 2ª ordem Subamortecido

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_m t} \cdot \sin(\omega_m\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t + \psi), \; t \geq 0$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Tempo de estabelecimento (t_s)

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_m} \; (2\%)$$ Aprox!

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_m} \; (5\%)$$

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_m} \; (1\%)$$

Período de oscilações (T_d)

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Tempo de pico (t_p)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T_d}{2}$$

Sobreelevação (S%)

$$S\% = 100\, e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\zeta = \frac{\left|\ln\left(\frac{100}{S\%}\right)\right|}{\sqrt{\ln^2\left(\frac{100}{S\%}\right) + \pi^2}}$$

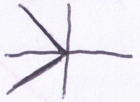
!

$\omega_d \uparrow \Rightarrow t_p \downarrow$

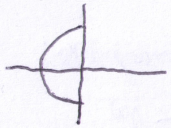
$\zeta \downarrow \Rightarrow S\% \uparrow$

$\zeta\omega_m \uparrow \Rightarrow t_s \downarrow$

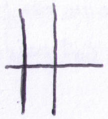
ζ constante $\Rightarrow$ S% constante

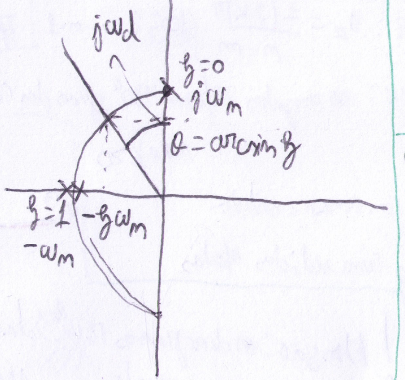


ω_m constante $\Rightarrow t_p$ constante



$\zeta\omega_m$ constante $\Rightarrow t_s$ constante





Estabilidade

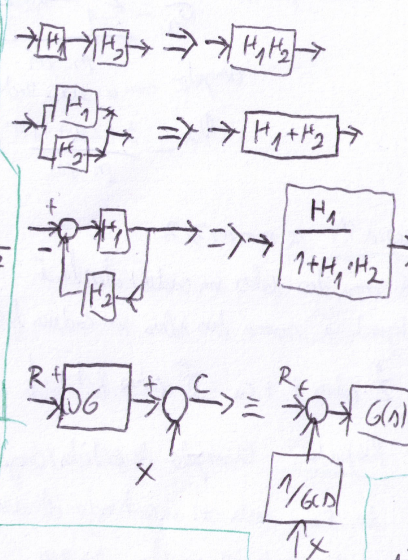
Polos no s.p.c.d

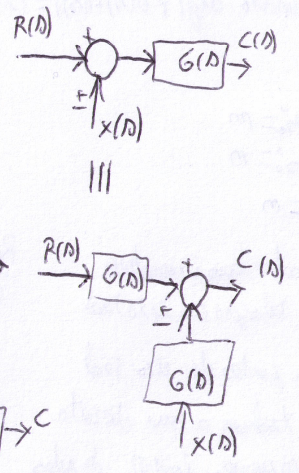
↳ instável

Polos no eixo ⇒ marginalmente estável

! Não pode faltar nenhum coeficiente (aka ser 0)

Diagrama de Blocos





Critério de Hurwitz

1ª e 2ª ordem: é condição necessária e suficiente para o sistema ser estável que os coeficientes do polinómio denominador sejam todos positivos (ou tenham o mesmo sinal)

3ª ++: é necessária, mas não suficiente!

Efeitos da Realimentação e Erros

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Para ser 0 a ess

degrau - $\frac{1}{s}$ - erro de posição - 1 integrador (tipo 1)

Rampa - $\frac{1}{s^2}$ - erro de Velocidade - 2 integradores (tipo 2)

parábola - $\frac{1}{s^3}$ - erro de aceleração - 3 integradores

Controlador PID

$P \rightarrow C(s) = K_p$ $\quad I \rightarrow C(s) = \frac{K_p}{s}$ $\quad PI \rightarrow C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$

$PD \rightarrow C(s) = K_p[1 + sT_D]$ $\quad PID \rightarrow C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right)$

HP

Root Locus

Condição de módulo $|KG(s)H(s)| = 1$

Condição de argumento $\arg(KG(s)H(s)) = (2K+1)180^\circ$, $K \in \mathbb{Z}$

Regra 1:

Número de zeros: $= m$

Número de polos: $= n$

Nº de Ramos $= n$

Regra 2: O root-locus é simétrico em relação ao eixo real

Regra 3: $K>0$ São pontos do eixo real que tenham à sua direita um número ímpar de polos e zeros da f.t.c.a

Regra 4: Os polos são pontos de partida do root-locus

Regra 5: m Ramos tendem para os zeros da f.t.c.a; $n-m$ tendem para infinito

Regra 6: $1+KG(s)H(s)=0$

$\Updownarrow$ $\sigma \rightarrow$ pontos nos reais

$$K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)}$$

$\frac{dK}{d\sigma} = 0 \rightarrow$ as soluções são break in ou breakaway points!

Regra 7: $\alpha =$ nº de ramos que se cruzam num ponto

$\lambda = \pm\frac{360^\circ}{\alpha}$: ângulo entre 2 ramos adjacentes com o mesmo sentido

$\theta = \pm\frac{180^\circ}{\alpha}$: ângulo entre 2 ramos adjacentes com sentidos opostos

(sentido = se se aproximam ou se afastam)

Regra 8: $n-m$ assíntotas

Cruzam-se no ponto

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{polos} - \sum_{i=1}^{m} \text{zeros}}{n-m}$$

ângulo com o eixo Real

$$\phi_a = \frac{\pm(2K+1)\pi}{n-m}, \quad K=0,1,\dots,n-m-1$$

Regra 9: se $n-m \geq 2$ a soma dos polos em cadeia aberta é igual à soma dos polos em cadeia fechada

$\sum^{n}$ polos f.t.c.a $= \sum^{n}$ polos f.t.c.f

Regra 10: O ângulo de partida/chegada de um ramo pode ser encontrado através da condição de argumento, já que a soma dos ângulos dos zeros menos a soma dos ângulos dos polos tem de ser 180°

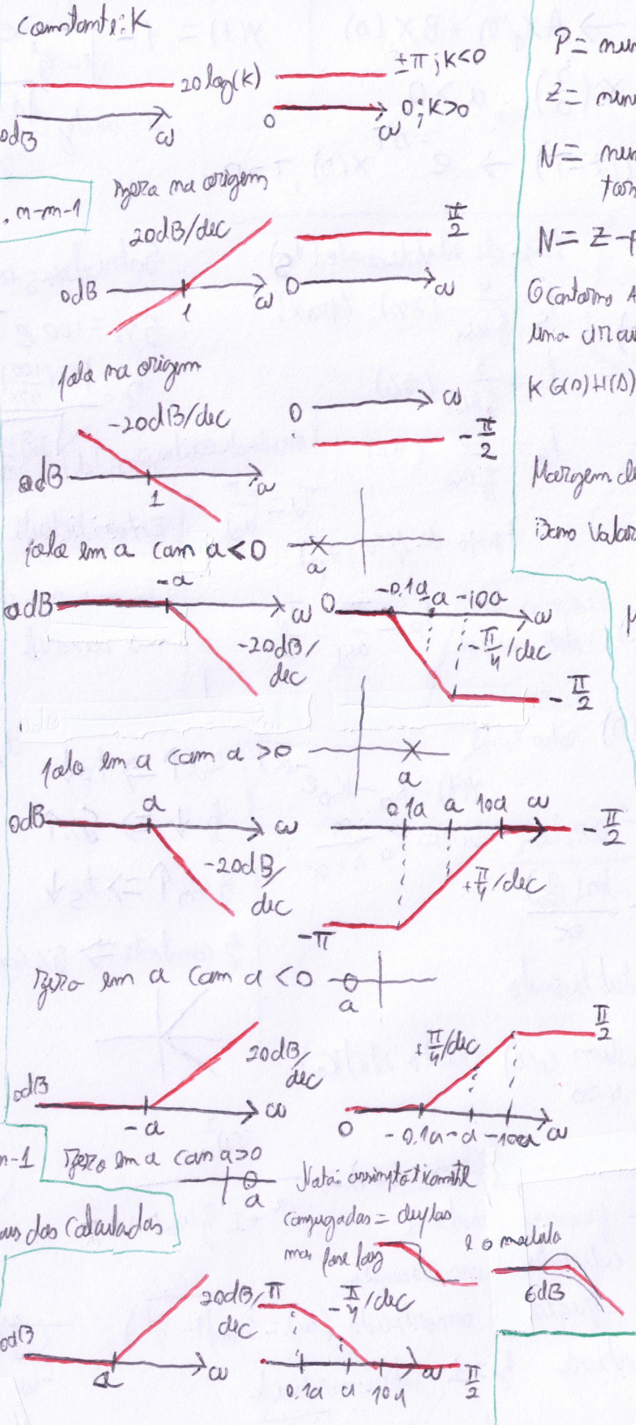
Cruzamento com o eixo imaginário:

$1+KG(s)H(s)=0$ e $s=j\omega$

$K<0$: é "tudo" o que não foi preenchido, tira a continuidade do positivo

- Regra 3: ímpar $\Rightarrow$ par
- Regra 8: $\phi_a = \frac{\pm(2K)\pi}{n-m}$ | $K=0,1,\dots,n-m-1$
- Regra 10: os ângulos diferem 180° graus dos calculados para $K>0$

Diagrama de Bode



! Atenção: os diagramas representados são assimptóticos
existe uma pequena queda de 3dB no ponto a

Critério de Nyquist

Contorno A definido no sentido horário

$P =$ número de polos no interior do contorno A

$Z =$ número de zeros no interior do contorno A

$N =$ número de voltas no sentido horário que o contorno B dá em torno da origem

$N = Z - P \Rightarrow$ queremos para ser estável $N+P=0$

O contorno A não pode ter polos no caminho, caso tenha analisa-se com uma circunferência de raio infinitesimal

$KG(s)H(s)\big|_{s=\varepsilon e^{j\theta}}$

$\omega_\pi =$ frequência cuja fase é -180°

Margem de Ganho: $MG = \frac{1}{|KG(s)H(s)|}\Big|_{s=j\omega_\pi}$ (quanto é que se pode aumentar o ganho até o sistema ficar instável)

Bons Valores: $30^\circ < \phi_M < 60^\circ$

$MG > 6dB$

Margem de fase: $\phi_M = \pi + \arg(KG(j\omega)H(j\omega))\Big|_{|KG(j\omega)H(j\omega)|}$

$\omega_G =$ frequência de 0dB

Para sistemas de 2ª ordem:

$$\phi_M = 90^\circ - \arctg\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}{2\zeta}\right)$$

Atraso $(Z) \rightarrow e^{-sZ}$

$|G_Z(j\omega)| = |G(j\omega)|$

$\arg(G_Z(j\omega)) = -\omega Z + \arg(G(j\omega))$ $\Rightarrow \phi_{MZ} = \phi_M - \omega_G Z$

Só afeta o diagrama da fase mas altera ambas as margens

Loop Shaping

Seguir a referência com erro $\leq -a\,dB \Rightarrow |KG(s)H(s)| \geq a\,dB$

Atenuar o ruído de pelo menos $-a\,dB \Rightarrow |KG(s)H(s)| \leq -a\,dB$

Atenuar distúrbios de pelo menos $a\,dB \Rightarrow |KG(s)H(s)| \geq a\,dB$

↑ Alguns requisitos comuns