ATENÇÃO

É sempre necessário confirmar se o $\hat{\theta}$ tal que $L'(\hat{\theta} | x_i)$ é um máximo, mas eu caguei (mas é importante)

Pergunta: 1
Cotação: 1

A variável aleatória X representa o número de acessos horários a um servidor e possui função de probabilidade $P(X=x) = 2^{-1}(x+1)(x+2)(1-p)^x p^3$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$, onde p é uma probabilidade desconhecida. Considere que $(X_1, \ldots, X_5)$ é uma amostra aleatória de dimensão 5 de X. Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança de $P(X=5)$ baseada na seguinte concretização de $(X_1, \ldots, X_5)$: (24 , 25 , 7 , 3 , 20). Preencha a caixa abaixo com o resultado obtido com, pelo menos, quatro casas decimais.

$P(X=x) = 2^{-1}(x+1)(x+2)(1-p)^x p^3$ $\qquad L(\hat{\theta} | x_1 \ldots x_5) = \max_{\theta} L(\theta | x_1 \ldots x_5)$

$i = \{1,2,3,4,5\}$

$$L(p | x_i) = \prod_i P(X = x_i) = (2^{-1})^5 \cdot (1-p)^{\sum_i x_i} \cdot (p^3)^5 \cdot \prod_i (x_i+1)(x_i+2) =$$

$$= 2^{-5} \cdot (1-p)^{79} \cdot p^{15} \cdot \prod_i (x_i+1)(x_i+2)$$

$$L' = -\ 2^{-5} \cdot \prod_i (x_i+1)(x_i+2) \cdot p^{14} \left(79(1-p)^{78} p - 15(1-p)^{79} \right)$$

$$L' = 0 \iff 79 \cdot p (1-p)^{78} - 15(1-p)^{79} = 0 \iff (1-p)^{78}\left(79p - 15(1-p)\right) = 0$$

$1 - p = 0 \iff p = 1$

$79p - 15 + 15p = 0 \iff \hat{p} = \frac{15}{94}$ $\qquad$ É mais fácil fazer pelos log's!

$P(X=x) = 2^{-1}(x+1)(x+2)(1-p)^x p^3$

$P(X=5) = 0.035777$

Admita que a proporção de potássio em certo fertilizante é representada pela variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde θ é um parâmetro positivo desconhecido. Determine a estimativa de máxima verosimilhança de $P(X \le 0.13)$ baseada na amostra (0.072 , 0.072 , 0.255 , 0.008 , 0.214 , 0.619) proveniente da população X. Preencha a caixa abaixo com o resultado obtido com, pelo menos, quatro casas decimais.

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

$i = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$L(\theta | x_i) = \prod_i \theta(1-x_i)^{\theta-1} = \theta^6 \prod_i (1-x_i)^{\theta-1}$$

$$\text{Log } L(\theta | x_i) = 6\ln(\theta) + (\theta - 1)\sum_i \ln(1-x_i)$$

$$L'(\theta | x_i) = \frac{6}{\theta} + \sum_i \ln(1-x_i)$$

$$L'(\hat{\theta} | x_i) = 0 \iff \frac{6}{\hat{\theta}} + \sum_i \ln(1-x_i) = 0$$

$$\hat{\theta} = -\frac{6}{\sum_i \ln(1-x_i)} = 3.61968$$

$$\int_0^{0.13} \hat{\theta}(1-x)^{\hat{\theta}-1} dx = \left[-(1-x)^{\hat{\theta}}\right]_0^{0.13} =$$

$= 0.395942$

Pergunta: 3
Cotação: 1

A variável aleatória X representa o número de acessos a um pequeno servidor e possui função de probabilidade $P(X=x) = (x+1)(1-p)^x p^2$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ onde p é uma probabilidade desconhecida. Considere que $(X_1, \ldots, X_5)$ é uma amostra aleatória de dimensão 5 de X e obtenha a estimativa de máxima verosimilhança de $P(X=2)$ baseada na seguinte concretização de $(X_1, \ldots, X_5)$: (4 , 7 , 6 , 8 , 8). Preencha a caixa abaixo com o resultado obtido com, pelo menos, três casas decimais.

$i = \{1,2,3,4,5\}$

$$L(p | x_i) = (1-p)^{\sum x_i} \cdot (p^2)^5 \cdot \prod (x_i + 1)$$

$$\text{Log } L(p | x_i) = (\sum x_i)\log(1-p) + 10\log(p) + \sum \log(x_i+1)$$

$$\text{Log } L'(p | x_i) = (\sum x_i') \cdot \frac{-1}{1-p} + 10 \cdot \frac{1}{p}$$

$$\text{Log } L'(p | x_i) = 0 \iff \sum x_i \cdot \frac{-1}{1-p} + \frac{10}{p} = 0 \iff \frac{-p \cdot \sum x_i + 10(1-p)}{p(1-p)} = 0 \iff \begin{cases} -p \cdot \sum x_i + 10 - 10p = 0 \\ p \neq 0 \vee p \neq 1 \end{cases} \iff p = 0.232558$$

$$P(X=2) = (2+1)(1-p)^2 p^2 = 0.09556$$

Admita que o número de programas examinados de modo independente até que se observe o primeiro programa que não compile é representado pela variável aleatória X com distribuição geométrica com parâmetro p, onde p é uma probabilidade desconhecida. Determine a estimativa de máxima verosimilhança de p, atendendo à amostra $(1, 2, 4, 14, 2)$ proveniente da população X.
Preencha a caixa abaixo com o resultado obtido com, pelo menos, quatro casas decimais.

$$X \sim Geom(p) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p, & x \in \mathbb{N}/\{0\} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$L(\hat{p} \mid x_i) = \prod_i (1-\hat{p})^{x_i - 1} \cdot \hat{p} =$$

$$5 - \hat{p}\left(5 + \sum x_i - 1\right)$$

$$\log L(\hat{p} \mid x_i) = 5 \log(\hat{p}) + \log(1-\hat{p}) \cdot \sum (x_i - 1)$$

$$\log L'(\hat{p} \mid x_i) = 0$$

$$\frac{5}{\hat{p}} - \frac{\sum (x_i - 1)}{1 - \hat{p}} = 0 \iff \begin{cases} 5(1-\hat{p}) - \sum (x_i - 1)\hat{p} = 0 \\ \hat{p} \neq 0 \vee \hat{p} \neq 1 \end{cases} \iff \hat{p} = \frac{5}{5 + \sum (x_i - 1)} = \frac{5}{23} = 0{,}217391$$

Admita que a distribuição da vida útil das baterias do flash de câmaras de determinado tipo é representada pela variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} x e^{-\theta x} \theta^2 & x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde θ é um parâmetro desconhecido. Determine a estimativa de máxima verosimilhança de θ, baseada na amostra $(1.087, 2.055, 3.163, 4.113$
$5.849)$

$$i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$L(\hat{\theta} \mid x_i) = \prod_i x_i e^{-\hat{\theta} x_i} \hat{\theta}^2 = \hat{\theta}^{10} \prod_i x_i e^{-\hat{\theta} x_i}$$

$$\log L(\hat{\theta} \mid x_i) = 10 \log(\hat{\theta}) + \sum_i \log(x_i) + \sum_i (-\hat{\theta} x_i)$$

$$\log L'(\hat{\theta} \mid x_i) = \frac{10}{\hat{\theta}} - \sum_i x_i$$

$$\log L'(\hat{\theta} \mid x_i) = 0 \iff \frac{10}{\hat{\theta}} = \sum_i x_i \iff \hat{\theta} = \frac{10}{\sum_i x_i} = 0.614742$$